

Γωνία μεταξύ διανυσμάτων στο επίπεδο

Πίνακας περιεχομένων

[**Εισαγωγή**](#_gjdgxs) **3**

[Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων με χρήση του προϊόντος κουκκίδων](#_int86pskt9cv) **5**

[Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων με χρήση διασταυρούμενου προϊόντος](#_k6vk1iy0lax6) **6**

[**Λυμένα Προβλήματα**](#_xs1kohmnrd88) **9**

[Παράδειγμα 1](#_1fob9te) 9

[Παράδειγμα 2](#_190brkc6j781) 10

[Παράδειγμα 3](#_erdhqpgx4jq6) 12

[**Εθνική Άσκηση Αξιολόγησης**](#_drhckcekq2u6) **13**

**Εισαγωγή**

Τα διανύσματα έχουν σημαντική σημασία στη διανυσματική γεωμετρία και τη φυσική. Συγκεκριμένα, η κατεύθυνση των διανυσμάτων και οι γωνίες στις οποίες προσανατολίζονται είναι κρίσιμες για τον προσδιορισμό της επίδρασης που θα έχει ο συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων.

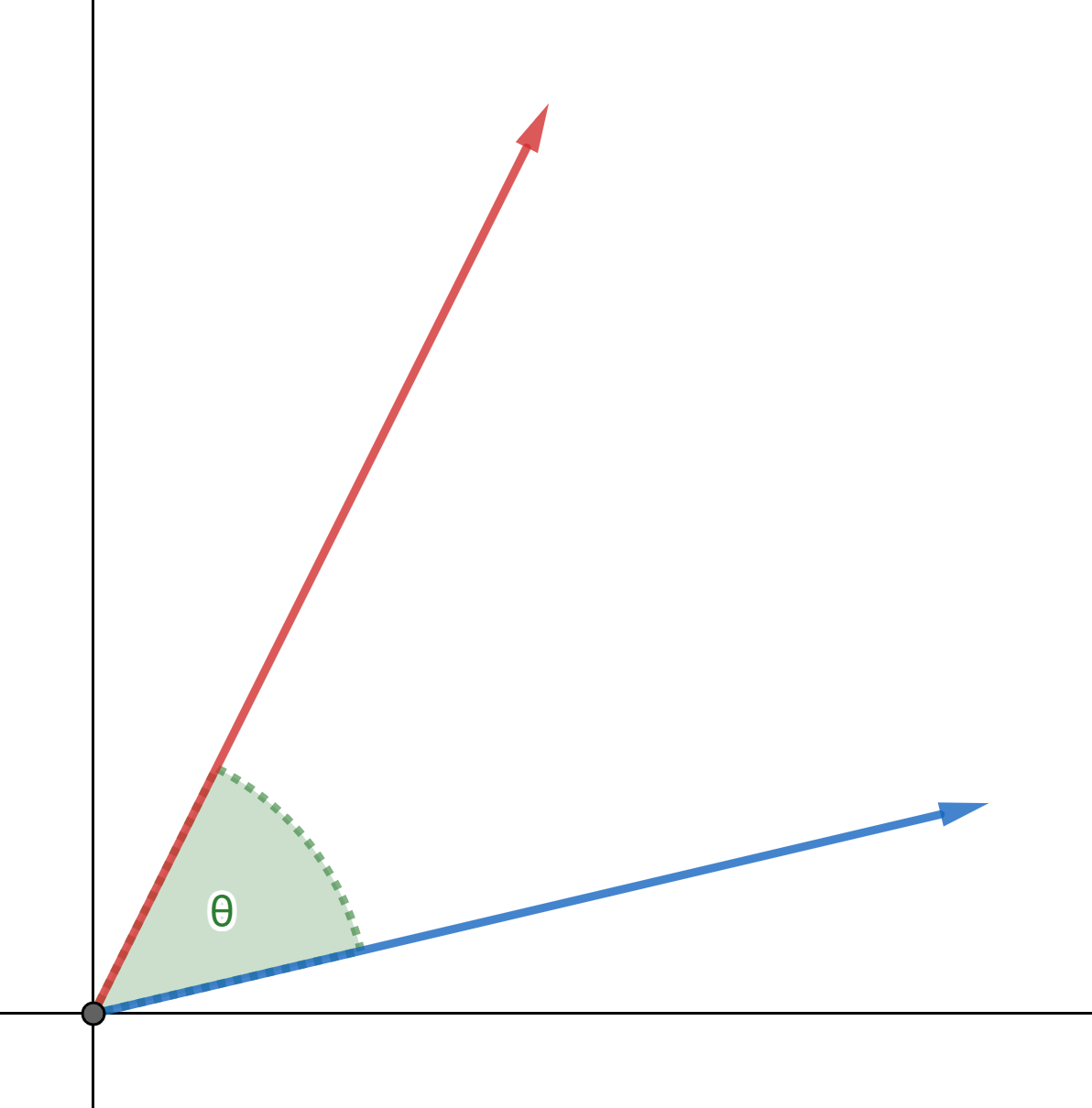
Για παράδειγμα, αν μελετήσουμε την κίνηση μιας μπάλας ποδοσφαίρου κατά τη διάρκεια ενός παιχνιδιού, η θέση της σε σχέση με το κέντρο του γηπέδου μπορεί να περιγραφεί από ένα διάνυσμα θέσης και η κίνηση από ένα διάνυσμα ταχύτητας του οποίου το μήκος δείχνει την ταχύτητα της μπάλας, άρα θα είναι όσο μεγαλύτερη τόσο πιο γρήγορα πάει η μπάλα. Η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας εξηγεί την κατεύθυνση της κίνησης της μπάλας.

Μερικές φορές έχουμε να κάνουμε με δύο διανύσματα που δρουν στο ίδιο αντικείμενο, επομένως η γωνία των διανυσμάτων είναι κρίσιμη. Στον πραγματικό κόσμο, οποιοδήποτε σύστημα υπόκειται σε πολλά διανύσματα συνδυασμένα μαζί.

Εάν υπάρχουν δύο διανύσματα σε ένα επίπεδο έτσι ώστε οι ουρές και των δύο διανυσμάτων να ενώνονται, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη γωνία μεταξύ τους ως:

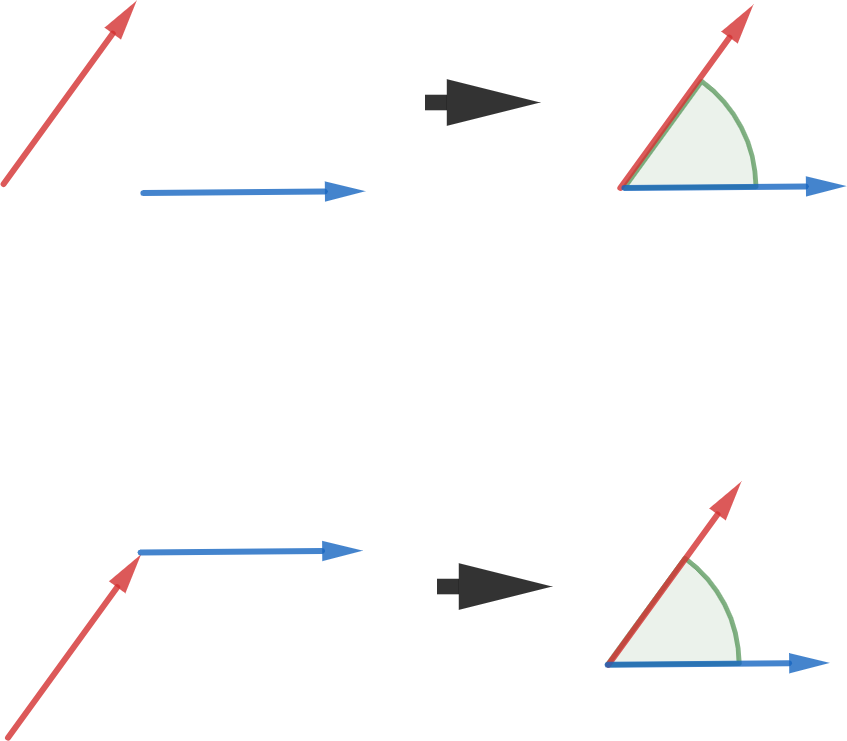
*«Η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι η μικρότερη γωνία κατά την οποία οποιοδήποτε από τα δύο διανύσματα περιστρέφεται γύρω από το άλλο διάνυσμα έτσι ώστε και τα δύο διανύσματα να έχουν την ίδια κατεύθυνση».*

Η συζήτηση των διανυσματικών γωνιών επικεντρώνεται στην εύρεση της μικρότερης γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων. Αυτό θα επικεντρωθεί στη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων σε τυπική θέση.  
  
*«Ένα διάνυσμα λέγεται ότι βρίσκεται σε τυπική θέση εάν το αρχικό του σημείο είναι η αρχή (0, 0).»*

**

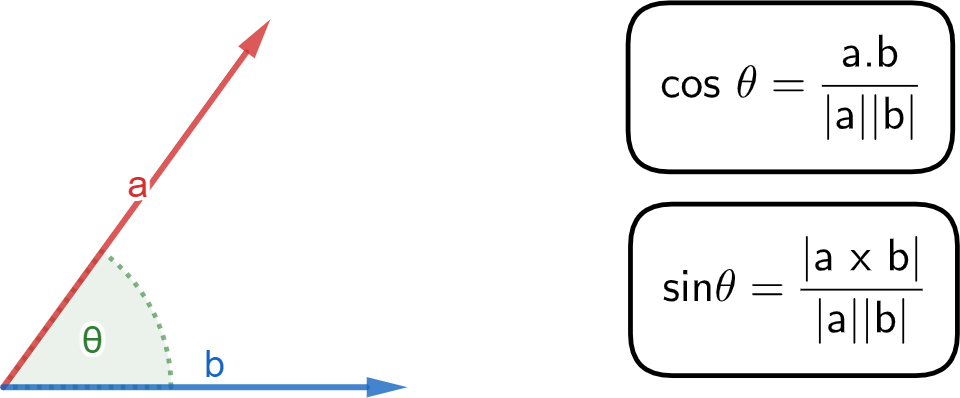
Με άλλα λόγια, η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι η γωνία μεταξύ των ουρών τους. Σημειώστε ότι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι πάντα μεταξύ 0° και 180°.

Εάν τα διανύσματα δεν είναι ενωμένα ουρά με ουρά, τότε πρέπει να τα ενώσουμε μετατοπίζοντας ένα από τα διανύσματα.



Μέσω του πολλαπλασιασμού των διανυσμάτων είναι δυνατό να βρεθεί η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων. Για την επίλυση του πολλαπλασιασμού των διανυσμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικές μέθοδοι: κλιμακωτό γινόμενο και διασταυρούμενο γινόμενο.

Μέσω του γινόμενου δύο διανυσμάτων προκύπτει μια κλιμακωτή ποσότητα. Από την άλλη πλευρά, όπως υποδηλώνει το όνομα, το διανυσματικό γινόμενο (ή διασταυρούμενο προϊόν) μεταξύ δύο διανυσμάτων παράγει μια διανυσματική ποσότητα.



**Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων με χρήση του εσωτερικού γινόμενου**

Θεωρήστε δύο διανύσματα a και b που χωρίζονται από κάποια γωνία θ. Ο τύπος του προϊόντος με κουκκίδες είναι:

Όπου **α.b** είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. |α| και |b| είναι το μέγεθος των διανυσμάτων **a** και **b,** και θ είναι η γωνία μεταξύ τους.  
Ο προηγούμενος τύπος δηλώνει ότι το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων a και b είναι ίσο με το γινόμενο των μεγεθών τους πολλαπλασιασμένο με το συνημίτονο της γωνίας.  
Ξεκινάμε λοιπόν από τον ορισμό του γινόμενου κουκίδων για να βρούμε την τιμή της γωνίας.  
Ας ξεκινήσουμε απομονώνοντας το συνημίτονο:

Τέλος, για να βρούμε τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων, του a και του b, θα λύσουμε τη γωνία θ,

Ας εστιάσουμε στο εσωτερικό γινόμενο, για αυτό το σκοπό εξετάστε δύο διανύσματα **a** και **b**

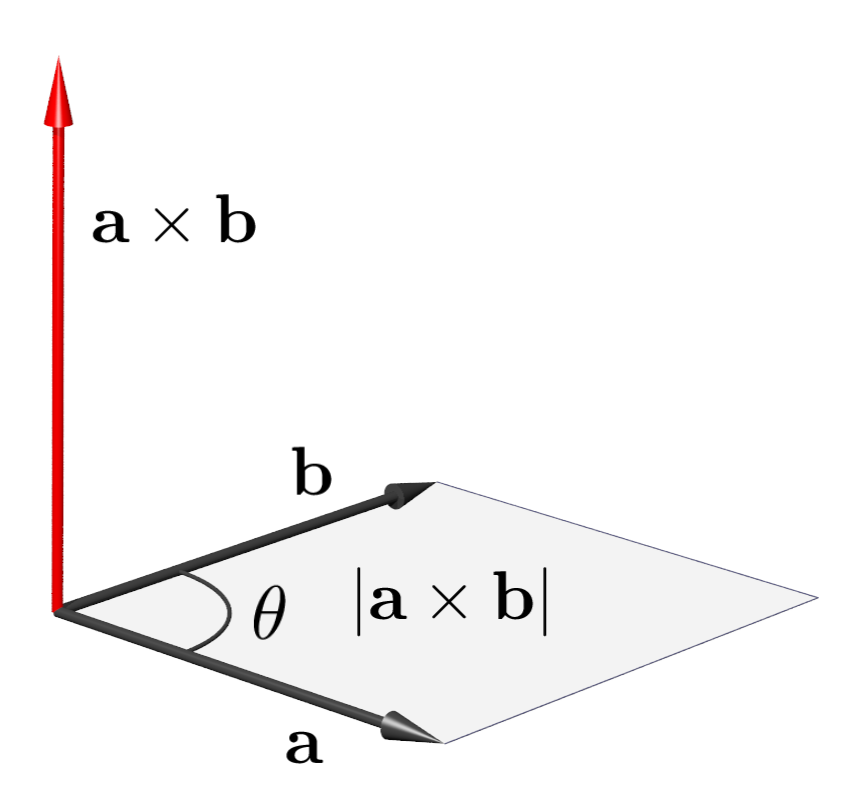
Στη συνέχεια, το γινόμενο με τελείες μεταξύ δύο διανυσμάτων α και b δίνεται ως:

**. = +**

**Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων με χρήση** **διανυσματικού γινόμενου**

Μια άλλη μέθοδος εύρεσης της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι το διανυσματικό γινόμενο.   
Το διανυσματικό γινόμενο ορίζεται ως:

*«Το διάνυσμα που είναι κάθετο τόσο στα διανύσματα όσο και στην κατεύθυνση δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. "*

**

Ο τύπος του διανυσματικού γινόμενου είναι:

Οπου **θ** είναι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων, |a| και |b| είναι τα μεγέθη δύο διανυσμάτων **a** και **b,** και **n** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περιέχει a και **b**. Η κατεύθυνσή του δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Για να λύσουμε αυτό το θ, ας πάρουμε το μέγεθος και των δύο μελών:

Επειδή όμως το n είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το μέγεθός του είναι 1. Έτσι παίρνουμε:

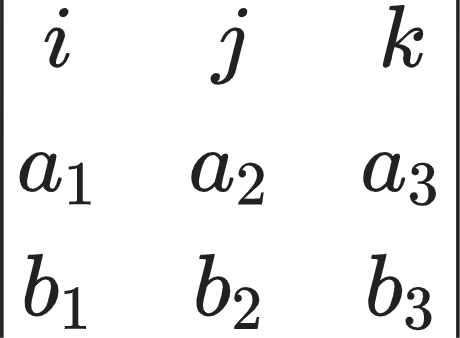
Ας απομονώσουμε την προκειμένου να βρεθεί η γωνία μεταξύ αυτών των διανυσμάτων

Τελικά μπορούμε να πάρουμε τη γωνία ως εξής:

Ας επικεντρωθούμε στο διανυσματικό γινόμενο. Εφόσον πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε το εγκάρσιο γινόμενο, πρέπει να λάβουμε υπόψη και την τρίτη διάσταση, επειδή το διαγώνιο γινόμενο θα είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περιέχει τα a και b (άρα δεν θα παραμείνει στο ίδιο επίπεδο).

Άρα μιλώντας γενικά μπορούμε να πάρουμε ως παράδειγμα δύο τρισδιάστατα διανύσματα a και b: όπως π.χ

Το διασταυρούμενο γινόμενο μπορεί να εκφραστεί ως ο προσδιοριστής του πίνακα



όπου είναι μια θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση.

Υπολογίζοντας την ορίζουσα παίρνουμε

οπότε παίρνουμε το παρακάτω διάνυσμα

Στη μελέτη περίπτωσης μας, δεδομένου ότι εξετάζουμε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων στο επίπεδο xy, μπορούμε να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό του a και b θέτοντας το τρίτο τους στοιχείο σε 0, αυτό θα τους κάνει δισδιάστατα διανύσματα. Λάβετε υπόψη ότι, ως αποτέλεσμα των σταυροειδών γινομένων, θα εξακολουθήσουμε να λαμβάνουμε ένα κάθετο διάνυσμα, το οποίο θα είναι κάθετο στο

xy επίπεδο που περιέχει **a** και **b**.

Αν υπολογίσουμε ξανά τους προηγούμενους τύπους λαμβάνοντας υπόψη **a** και **b** ως ανήκει στο επίπεδο xy (έτσι με ), εμεις αποκτουμε:

**Λυμένα Προβλήματα**

**Παράδειγμα 1**

*ΑΝΑΘΕΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:*

Βρείτε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **a** = <1, 2> και **b**= <-2, -1> χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο.

*Λύση:*

Έστω θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων a και b.

Ας βρούμε τη γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο.

Για να χρησιμοποιήσετε τον τύποχρειαζόμαστεγια να υπολογίσετε το γινόμενο κουκίδων και τα μεγέθη και των δύο διανυσμάτων.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία ως εξής:

**143,13°**

**Παράδειγμα 2**

*ΑΝΑΘΕΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:*

Βρείτε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων a = <1, 2> και b = <-2, -1> χρησιμοποιώντας το **διανυσματικό γυνόμενο** .

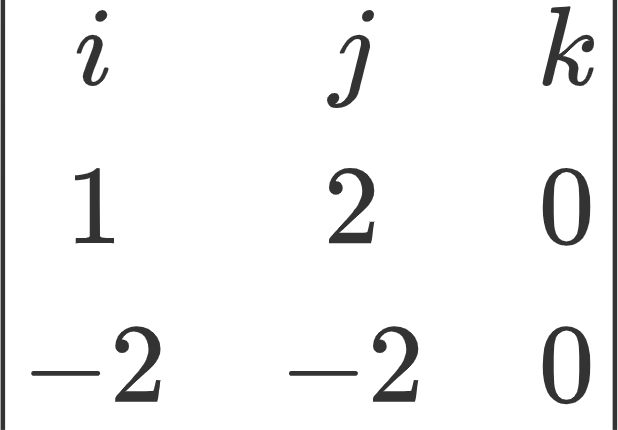
*Λύση:*

Έστω θ η γωνία μεταξύ a και b. Ας βρούμε τη γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων χρησιμοποιώντας το διασταυρούμενο γινόμενο.

Εφόσον πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε το διασταυρούμενο γινόμενο, πρέπει να λάβουμε υπόψη την τρίτη διάσταση, επομένως πρέπει να επεκτείνουμε τα διανύσματά μας στην τρίτη διάσταση.

Ενημερώστε τη σημείωση των α και β:

Ας υπολογίσουμε το διασταυρούμενο γινόμενο του **a** και **b**.



Τώρα βρίσκουμε το μέγεθός του.

Τώρα θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για να πάρουμε την τιμή της γωνίας

Μετά παίρνουμε

Λαμβάνουμε θ ≈**36,87 (ή) 143,13°** (= 180 - 36,87) (ως [δικο τους](https://www.cuemath.com/trigonometry/sine-function/) είναι θετική και στο δεύτερο τεταρτημόριο).

**Παράδειγμα 3**

*ΑΝΑΘΕΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:*

Βρείτε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **a** = <0, 5> και **b**= <2, 0> χρησιμοποιώντας το **προϊόν με κουκκίδες**.

*Λύση:*

Έστω θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων a και b.

Ας βρούμε τη γωνία θ μεταξύ των διανυσμάτων χρησιμοποιώντας το γινόμενο κουκίδων.

Για να χρησιμοποιήσετε τον τύποχρειαζόμαστεγια να υπολογίσετε το γινόμενο κουκίδων και τα μεγέθη και των δύο διανυσμάτων.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία ως εξής:

**90°**

*Σημειώσεις*:

Υπάρχουν λίγες σκέψεις που μπορούν να γίνουν για να επιταχυνθεί η προσέγγιση αυτής της λύσης.

Πρώτα απ 'όλα ο υπολογισμός του και μπορούν να απλοποιηθούν αφού είναι μονοδιάστατα διανύσματα (μία από τις συνιστώσες τους είναι 0) άρα το μέτρο τους είναι ίσο με τη μη μηδενική συνιστώσα τους.

Επιπλέον ο υπολογισμός του και, έστω και απλό, δεν είναι καθόλου απαραίτητο. Αφού το ανακαλύψαμε ισούται με 0 και αυτός θα είναι ο αριθμητής του ορίσματος arccos, δεν είναι απαραίτητο να αξιολογήσουμε και τον παρονομαστή.

Αλλά, προχωρώντας παρακάτω, αυτή η άσκηση θα μπορούσε να επιλυθεί χωρίς υπολογισμούς, αλλά μόνο με γεωμετρικούς λόγους. Από **ένα** είναι ένα κατακόρυφο διάνυσμα (η x συνιστώσα του είναι 0) και bείναι ένα οριζόντιο διάνυσμα (η συνιστώσα του y είναι 0), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι ορθογώνια διανύσματα, αυτό σημαίνει ότι η γωνία μεταξύ τους είναι 90°.

**Άσκηση Αξιολόγησης**

(Εξέταση ωριμότητας - Ιταλία:

<https://drive.google.com/file/d/16bxAx7d0ts5zgr3P62qzGu0ZPoZ2aywl/view?usp=sharing>)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Θεωρήστε τρίγωνα των οποίων η βάση είναι AB = 1 και των οποίων η κορυφή C μεταβάλλεται έτσι ώστε η γωνία C Aˆ B να είναι

διατηρεί τη διπλάσια γωνία A Bˆ C .

1. Αναφέροντας το επίπεδο σε ένα βολικό σύστημα συντεταγμένων, προσδιορίστε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του γεωμετρικού τόπου γ που περιγράφεται από τον C.

2. Να παραστήσετε το γ, λαμβάνοντας φυσικά υπόψη τις προβλεπόμενες γεωμετρικές συνθήκες.

3. Προσδιορίστε το πλάτος της γωνίας A Bˆ C που κάνει το άθροισμα των τετραγώνων των υψών σε σχέση με τις πλευρές AC και BC και, με τη βοήθεια αριθμομηχανής, δώστε μια τιμή της κατά προσέγγιση σε μοίρες και πρώτους (εξάγωνο) .

4. Να αποδείξετε ότι A Bˆ C = 36° τότε AC=