

**Γκαουσιανή Απαλοιφή**

Σχολική βαθμίδα: Κ12

**Περιεχόμενο**

[Ορισμός 3](#_Toc125664603)

[Η μέθοδος επίλυσης της μεθόδου 3](#_Toc125664604)

[Εφαρμογή 6](#_Toc125664605)

[Αλγόριθμος 7](#_Toc125664606)

[Το πρόγραμμα c++ 9](#_Toc125664607)

[Άσκηση 1 11](#_Toc125664608)

[Άσκηση 2 12](#_Toc125664609)

[Άσκηση 3 15](#_Toc125664610)

[Άσκηση 4 (από εξετάσεις BAC) 18](#_Toc125664611)

[Άσκηση 5 19](#_Toc125664612)

[Άσκηση 6 20](#_Toc125664613)

[Άσκηση 7 23](#_Toc125664614)

[Πηγές 25](#_Toc125664615)

# Ορισμός

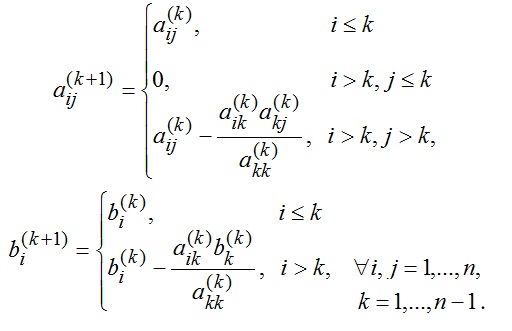
Στα μαθηματικά, η Γκαουσιανή απαλοιφή (που ονομάζεται επίσης μείωση γραμμών) είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Πήρε το όνομά του από τον Carl Friedrich Gauss, έναν διάσημο Γερμανό μαθηματικό που έγραψε για αυτή τη μέθοδο αλλά δεν την εφευρέθηκε.

Η Γκαουσιανή απαλοιφή είναι μια τεχνική για τη μετατροπή της μήτρας Α σε ανώτερη τριγωνική μορφή. Ο πίνακας μετασχηματισμού T είναι ένας ενιαίος κατώτερος τριγωνικός πίνακας που λαμβάνεται ως ακολουθία (γινόμενο) στοιχειωδών κατώτερων τριγωνικών μετασχηματισμών της μορφής T = Tn-1Tn-2 . . . Τ1, όπου οι μήτρες Tp έχουν κατώτερο τριγωνικό σχήμα n:

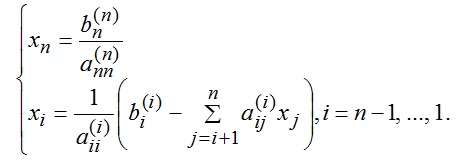
# ****Η μέθοδος επίλυσης της μεθόδου****

Σημειώνουμε, αρχικά, A(1)=A, b(1)=b, ο εκθέτης που αντιπροσωπεύει το στάδιο.

Οι σχέσεις υποτροπής στη μέθοδο της Γκαουσιανή απαλοιφή είναι:



Το σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο αντίστροφης υποκατάστασης σύμφωνα με τις σχέσεις:



Η Γκαουσιανή απαλοιφή είναι μια μέθοδος για την επίλυση εξισώσεων μήτρας της μορφήςAx=b . Ο αλγόριθμος δεν είναι περίπλοκος, αλλά εμφανίζεται αρκετά συχνά σε διαγωνισμούς προγραμματισμού και έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

\begin{pmatrix}
a_{11} &a_{12} & \ldots &a_{1n}\\
a_{21} &a_{22} & \ldots &a_{2n}\\
\vdots & \vdots &gtts & \vdots\\
a_{n1} &a_{n2} & \ldots &a_{nn}
\end{pmatrix} * 
\begin{pmatrix}
x_{1} \\
x_{2} \\
\vdots \\
x_{n}
\τέλος{pmatrix} = 
\begin{pmatrix}
b_{1} \\
b_{2} \\
\vdots \\
b_{n}
\end{pmatrix}

Για να λύσουμε το σύστημα θα μετατρέψουμε όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο του διευρυμένου πίνακα σε 0 για να μπορέσουμε να γράψουμε κάθε άγνωστο μόνο από την άποψη των άγνωστων με υψηλότερους δείκτες.


\begin{pmatrix}
a_{11} &a_{12} & \ldots &a_{1n} &b_{1}\\
a_{21} &a_{22} & \ldots &a_{2n} &b_{2}\\
a_{31} &a_{32} & \ldots &a_{3n} &b_{3}\\
\vdots & οδοτς & _οδοτς \\
a_{n1} &a_{n2} & \ldots &a_{nn} &b_{n}
\end{pmatrix}

\δεξιά

\begin{pmatrix}
a_{11} &a_{12} & \ldots &a_{1n} &b_{1}\\
0 & {22} & \ldots &a'_{2n} &b'_{2}\\
0 &0 & \ldots &a'_{3n} &b'_{3}\\
\vdots & οδοτς & _οδοτς \\
0 &0 & \ldots &a'_{nn} &b'_{n}
\end{pmatrix}


Έχοντας τον πίνακα σε αυτή τη μορφή μπορούμε εύκολα να βρούμε κάθε άγνωστο στην εξίσωση όπου οι άγνωστοι με χαμηλότερους δείκτες έχουν τον συντελεστή 0:  
![
\:
x_{n}=\frac{b'_{n}}{a'_{nn}}](data:image/gif;base64,R0lGODlhRgAeAPMPAAAAABERESIiIjMzM0RERFVVVWZmZnd3d4iIiJmZmaqqqru7u8zMzN3d3e7u7v///yH5BAAAAAAALAAAAABGAB4AAATx8MlJq7046827/5cAjuSoGGWqSouQTMeyzmTQTAWte+3EvLtg5jBYJIDCpIUgewSUUIrowXhGo7mHAXGNKhQJ7kMRA3eVDAaBeugoFgcE4rA+Z8iPg8KxSfAXAQ4/HweFhodtJAcMeQuMGjcPCFlnAJaXmJmaAHUWBWJ2SgGPMmQJCwqUFYisI1MfCk8LACw3ZG0OtF0nJkUMcQuRDwWMqWcxQlMGqHxYQgxZegpBR3Avg6EzCCh509k6Ao+v3zNWDQQOTeQqR2BbEmSoQF8LcOsgaWu/EqcyBs333LTR04zbAIABNyxq9Igbk4QQI2aIAAA7)  
x_{n-1}=\frac{b'_{n-1}-a'_{n-1n}*x_{n}}{a'_{n-1n-1}}  
 \vdots  
 x_{i}=\frac{b'_{i}-\sum\limits_{j=i+1}^n a'_{ij}*x_{j}}{a'_{ii}}

Τώρα που ξέρουμε πώς να βρούμε τα άγνωστα από την τριγωνική μορφή της μήτρας, το μόνο που μένει είναι να μεταμορφώσουμε τη μήτρα.

Για να μετατρέψουμε τη μήτρα σε τριγωνικό σχήμα θα εφαρμόσουμε δύο λειτουργίες:   
L_{i} \longleftrightarrow L_{j}την ανταλλαγή δύο γραμμών  
L_{j} \longleftarrow L_{j}+a*L_{i} όπουL_{i} είναι μια σειρά της εκτεταμένης μήτρας.

Για παράδειγμα:


\begin{pmatrix}
2  &  1 & -1 & 8 \
-3 & -1 & 2 & -11 \
-2 & 1 & 2 & -3
\end{pmatrix} \longrightarrow

\begin{pmatrix}
2 & 1 & -1 & 8 \
0 & {1}{2} & \frac{1}{2} &1 \
0 & 2 & 1 & 5
\end{pmatrix} \longrightarrow
\begin{pmatrix}
2 & 1 & -1 & 8 \
0 & {1}{2} & \frac{1}{2} &1 \
0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}


Για να πάρω τον δεύτερο πίνακα πολλαπλασίασα την πρώτη γραμμή και την πρόσθεσα στη δεύτερη γραμμή και στη συνέχεια την πρόσθεσα στην τελευταία γραμμή\frac{3}{2} (). \frac{2}{2}=1Για να πάρω τον τελευταίο πίνακα πολλαπλασίασα τη δεύτερη γραμμή με -\frac{2}{\frac{1}{2}}=-4 .

Όπως φαίνεται από το παράδειγμα, σε κάθε βήμα κατασκευάζουμε μια στήλη και μια γραμμή από τον τελικό πίνακα, η στήλη γεμίζει με 0 κάτω από τη σταθερή γραμμή. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετατρέψουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τη σειρά i στη στήλη j σε 0. Για κάθε γραμμή k ( k>i ) θα πολλαπλασιάσουμε τη γραμμή i και θα την προσθέσουμε στη γραμμή k έτσι το στοιχείο στη στήλη j μετατρέπεται σε 0-\frac{a_{kj}}{a_ij}. Σε περίπτωση a_{ij}=0 που πρέπει να αναζητήσουμε μια γραμμή k(k > i) τέτοια ώστε a_{kj}\neq 0. Εάν αυτή η γραμμή δεν υπάρχει, το σύστημα δεν έχει λύση. Εφαρμόζοντας αυτά τα βήματα θα φτάσουμε τελικά σε μια τριγωνική μήτρα από την οποία θα βρούμε τα άγνωστα. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι O(N^3)

# Εφαρμογή

Ο παρακάτω κώδικας λύνει επίσης την περίπτωση όταν έχουμε περισσότερες εξισώσεις από άγνωστες.

κενό elim(int n,int m,διπλό s[][]) {*//system με n άγνωστες εξισώσεις m*

for(int i=1,j=1,k;i<=n &&amp j<=m;) {

για(k=ι;κ<=ν; ++κ)

αν(s[k][j]!=0) σπάσει? *// Αναζητούμε μια γραμμή που θα χρησιμοποιηθεί για να σχηματιστούν μηδενικά στη στήλη J*

if(k>n) {*// Δεν βρήκα καμία γραμμή για την οποία το s[i][j] είναι μηδέν, οπότε μεταβαίνουμε στην επόμενη στήλη, η γραμμή i δεν είναι η τελική*

++ι;

συνεχίζω;

}

αν(k!=i)για(int l=1; l<=m+1; ++l) ανταλλαγή(s[i][l],s[k][l])· *//Ανταλλάσσουμε τις γραμμές για να έχουμε ένα μηδενικό στοιχείο στη γραμμή I και στη στήλη J*

για(k=i+1; κ<=ν; ++ια)

για(ίντ λ=μ+1; λ>=ι; --λ)

σ[κ][λ]-=((σ[κ][ι]\*σ[ι][λ])/σ[ι][ι])· *//Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό για κάθε γραμμή μεγαλύτερη από i ώστε να έχει 0 στη στήλη J κάτω από τη γραμμή I*

++θ; ++ι;

}

*μαθαίνουμε το άγνωστο*

για(ιντ ι=ν; θ;--θ)

για(int j=1; j<=m+1; ++j) αν(fabs(s[i][j])>EPS) {

*επειδή είναι δυνατόν να έχουμε περισσότερες εξισώσεις από άγνωστες*

*αναζητούμε τον πρώτο μηδενικό συντελεστή σε κάθε γραμμή, που εμφανίζεται από δεξιά προς τα αριστερά*

if(j==m+1) {*//η γραμμή δεν έχει μη μηδενικούς συντελεστές, οπότε δεν έχουμε λύση*

ζ<<"Απάτες";

έξοδος(0)·

}

x[j]=s[i][m+1]·

για(ινt k=j+1; k<=m; ++k) x[j]-=s[i][k]\*x[k];

x[j]/=σ[i][j]·

σπάζω; *//πάμε στην προηγούμενη γραμμή*

}

}

# Αλγόριθμος

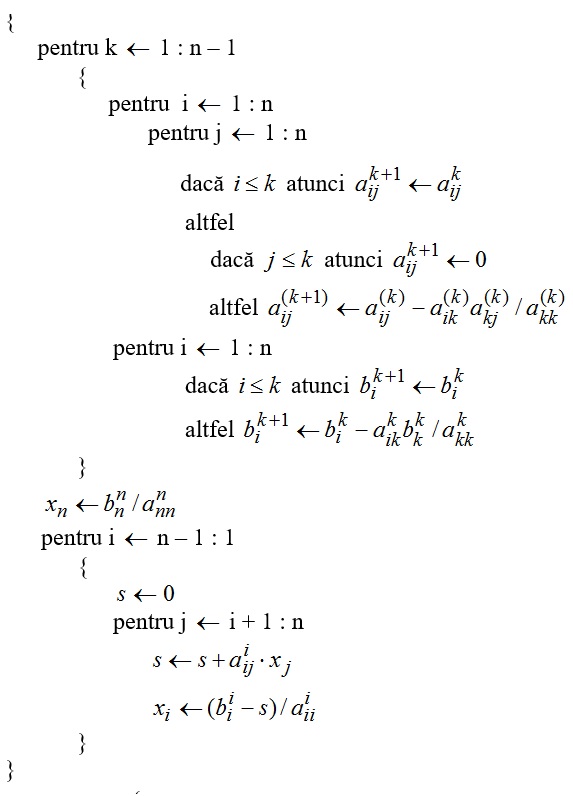
Ο αλγόριθμος που σχετίζεται με τη μέθοδο εξάλειψης Gauss είναι:

Είσοδος:

* n = ο αριθμός των εξισώσεων και των άγνωστων του συστήματος
* A = πίνακας συστήματος
* b = το διάνυσμα των ελεύθερων όρων

Έξοδος:

* x = το διάνυσμα λύσης



# Το πρόγραμμα c++

#include "stdafx.h"

#include

using namespace std;

#define max 15

void main(void)

{

float s;

float a[max + 1][max + 1][max + 1], b[max + 1][max + 1], x[max + 1];

int n, i, j, k;

cout << "dati dimensiunea matricii" << endl; cin >> n;

cout << "dati matricea sistemului " << endl;

for (i = 1; i <= n; i++)

for (j = 1; j <= n; j++)

{

cout << "a[" << i << j << "]=";

cin >> a[i][j][1];

}

cout << endl;

cout << "dati vectorul termenilor liberi " << endl;

for (i = 1; i <= n; i++)

{

cout << "b[" << i << "]=";

cin >> b[i][1];

}

cout << endl;

for (k = 1; k <= n - 1; k++)

{

for (i = 1; i <= n; i++)

for (j = 1; j <= n; j++)

{

if (i <= k)a[i][j][k + 1] = a[i][j][k];

else if (j <= k)a[i][j][k + 1] = 0;

else a[i][j][k + 1] = a[i][j][k] - a[i][k][k] \* a[k][j][k] / a[k][k][k];

}

for (i = 1; i <= n; i++)

if (i <= k)b[i][k + 1] = b[i][k];

else b[i][k + 1] = b[i][k] - a[i][k][k] \* b[k][k] / a[k][k][k];

}

x[n] = b[n][n] / a[n][n][n];

for (i = n - 1; i >= 1; i--)

{

s = 0;

for (j = i + 1; j <= n; j++)

s = s + a[i][j][i] \* x[j];

x[i] = (b[i][i] - s) / a[i][i][i];

}

cout << "The approximate solution is:" << endl;

for (i = 1; i <= n; i++)

cout << x[i] << ' ';

cout << endl;

system("pause");

}

# Άσκηση 1

Λαμβάνεται υπόψη το ακόλουθο σύστημα:



Οι συντελεστές γράφονται σε μορφή πίνακα και στα δεξιά σε ξεχωριστή στήλη - ελεύθερα μέλη. Η στήλη με τα ελεύθερα μέλη διαχωρίζεται για ευκολία. Ο πίνακας που περιλαμβάνει αυτήν τη στήλη ονομάζεται extended.

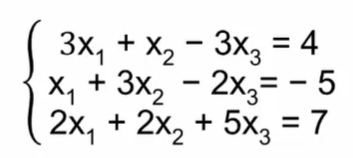


Επιπλέον, η κύρια μήτρα συντελεστή πρέπει να μειωθεί σε ανώτερη τριγωνική μορφή. Αυτό είναι το κύριο σημείο επίλυσης του συστήματος με τη μέθοδο Gaussian. Απλά, μετά από μερικούς χειρισμούς, η μήτρα θα πρέπει να μοιάζει με αυτό, έτσι ώστε να υπάρχουν μόνο μηδενικά στο κάτω αριστερό μέρος της:

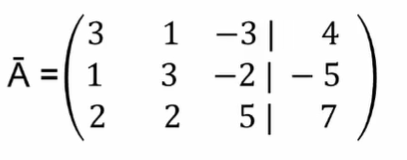


# Άσκηση 2

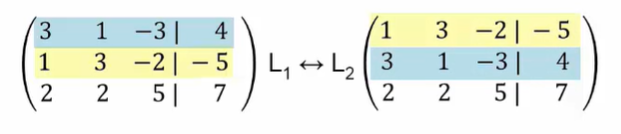
Λαμβάνεται υπόψη το ακόλουθο σύστημα:

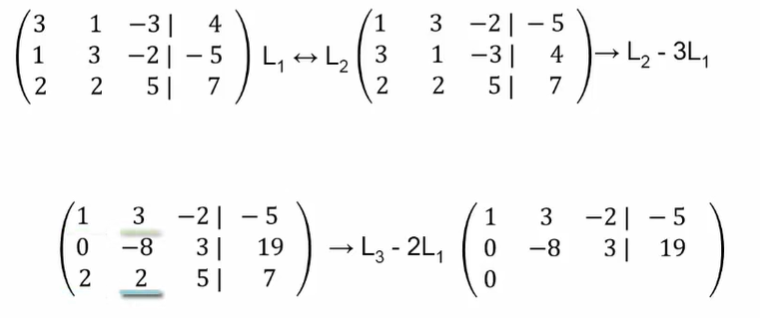


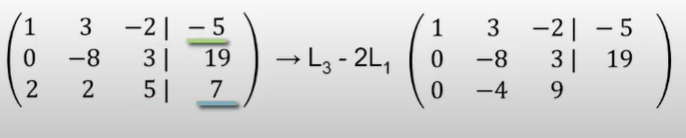
Ο εκτεταμένος πίνακας που σχετίζεται με το σύστημα είναι:



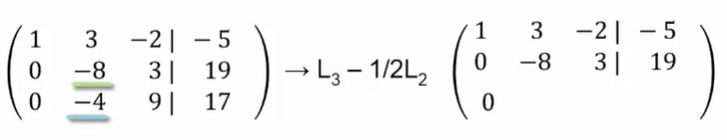
Αλλάζαμε τη γραμμή L1  με τη γραμμή L2 για να έχουμε τη χαμηλότερη τιμή στην πρώτη γραμμή στην πρώτη θέση

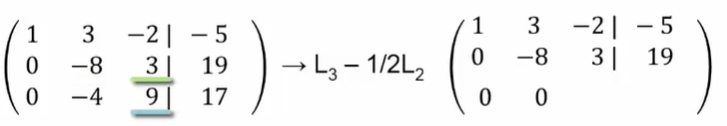


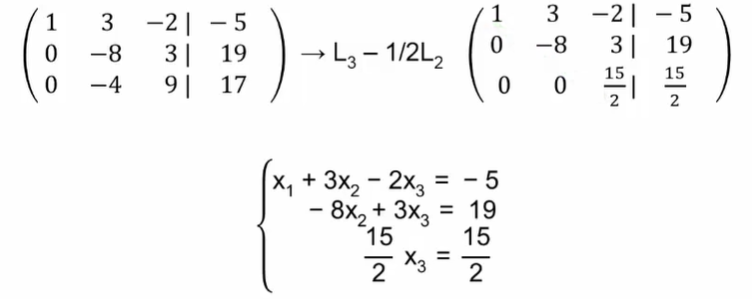


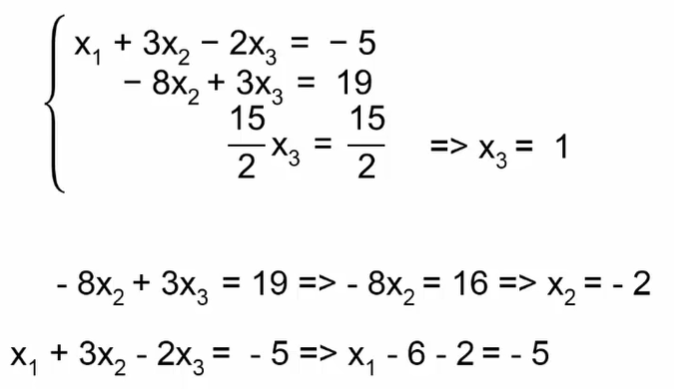












# Άσκηση 3

Εφαρμόστε τη μέθοδο εξάλειψης Gaussian για να λύσετε το σύστημα:



**Επίλυση**:

Ο πίνακας Α που σχετίζεται με το σύστημα (στο βήμα 1) και το διάνυσμα των ελεύθερων όρων b είναι:





Οι λύσεις είναι:

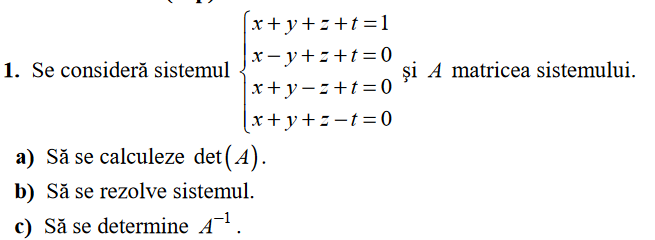


δηλαδή, η λύση του συστήματος είναι:

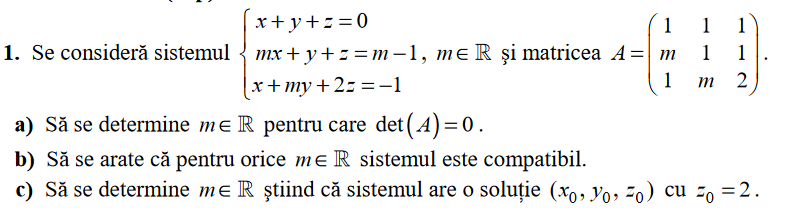


# Άσκηση 4 (από εξετάσεις BAC)

Εξετάσεις BAC 2018



Εξετάσεις BAC 2017



# Άσκηση 5

Λαμβάνεται υπόψη το ακόλουθο σύστημα:



Οι συντελεστές γράφονται σε μορφή πίνακα και στα δεξιά σε ξεχωριστή στήλη - ελεύθερα μέλη. Η στήλη με τα ελεύθερα μέλη διαχωρίζεται για ευκολία. Ο πίνακας που περιλαμβάνει αυτήν τη στήλη ονομάζεται extended.



Επιπλέον, η κύρια μήτρα συντελεστή πρέπει να μειωθεί σε ανώτερη τριγωνική μορφή. Αυτό είναι το κύριο σημείο επίλυσης του συστήματος με τη μέθοδο Gaussian. Απλά, μετά από κάποιο χειρισμό, η μήτρα θα πρέπει να μοιάζει με αυτό, έτσι ώστε να υπάρχουν μόνο μηδενικά στο κάτω αριστερό μέρος της:



# 

# Άσκηση 6

Λαμβάνεται υπόψη το ακόλουθο σύστημα:

Διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα με χαμηλή εμπιστοσύνη

Ο εκτεταμένος πίνακας που σχετίζεται με το σύστημα είναι:

Μια εικόνα που περιέχει κείμενο, ρολόι

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα

Αλλάζαμε τη γραμμή L1  με τη γραμμή L2 για να έχουμε τη χαμηλότερη τιμή στην πρώτη γραμμή στην πρώτη θέση

Διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα

Ημερολόγιο

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα με μέτρια εμπιστοσύνη

Μια εικόνα που περιέχει κείμενο, ρολόι, μετρητή

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα



Μια εικόνα που περιέχει λογότυπο

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα

Λογότυπο

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα

Διάγραμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα

Κείμενο, γράμμα

Περιγραφή που δημιουργείται αυτόματα

# Άσκηση 7

Εφαρμόστε τη μέθοδο εξάλειψης Gaussian για να λύσετε το σύστημα:



**Επίλυση**:

Ο πίνακας Α που σχετίζεται με το σύστημα (στο βήμα 1) και το διάνυσμα των ελεύθερων όρων b είναι:





Οι λύσεις είναι:



δηλαδή, η λύση του συστήματος είναι:



# Πηγές

<https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_polygon>

<https://www.youtube.com/watch?v=qetSusATv2w>