

Διανυσματική μορφή σε σύστημα συντεταγμένων 3D

Πίνακας περιεχομένων

[Διανύσματα σε χώρο 3D](#_heading=h.gjdgxs) **3**

[Τι είναι ένα 3D-Διάνυσμα;](#_heading=h.30j0zll)  3

[Συστατικά ενός 3D διανύσματος](#_heading=h.u4lq2kj9idry) 3

[Μέγεθος](#_heading=h.ro7bofwj0rqx) 3

[Κατεύθυνση](#_heading=h.fn6cxjlbjngb) 4

[Διανυσματική μορφή](#_heading=h.uisqedrey7wy) **4**

[Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων](#_heading=h.uyaanh6etpff) 4

[Μοναδιαίοι φορείς του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων](#_heading=h.rylmbg4d7bw) 5

[Πράξεις](#_heading=h.n33lzrpbqx6q) 5

[Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων](#_heading=h.8ismeonbl6h0) 6

[Ομοιογενές σύστημα συντεταγμένων](#_heading=h.d4f78cfl9mq5) 7

Πληθάριθμος 8

Διανύσματα και επίπεδα 8

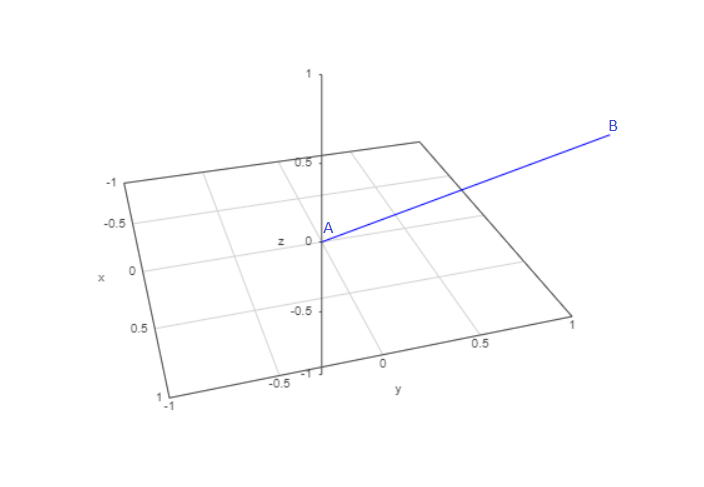
Επίλυση προβλημάτων **9**

Παραπομπές **11**

# Διανύσματα σε χώρο 3D

## Τι είναι ένα 3D-Διάνυσμα;

## Ένα 3D διάνυσμα αναπαρίσταται σε ένα τριδιάστατο σύστημα συντεταγμένων ως γραμμικό τμήμα που τρέχει από το σημείο Α στο σημείο Β.



**Εικόνα 1**. Διανυσματική αναπαράσταση σε 3D καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

## Στοιχεία ενός διανύσματος 3D

## Σε ένα περιβάλλον 3D εργαζόμαστε με τρεις βάσεις συντεταγμένων: τον άξονα x, τον άξονα y και τον άξονα z.

## Για χάρη αυτής της εισαγωγής, υποθέτουμε ότι το σημείο Α θα είναι (0,0,0) και γράφουμε ένα διάνυσμα δίνοντας πληροφορίες για το σημείο Β.

→

← αυτό είναι το διάνυσμα που πηγαίνει από (0,0,0) έως (1,2,-3)

### Μέγεθος

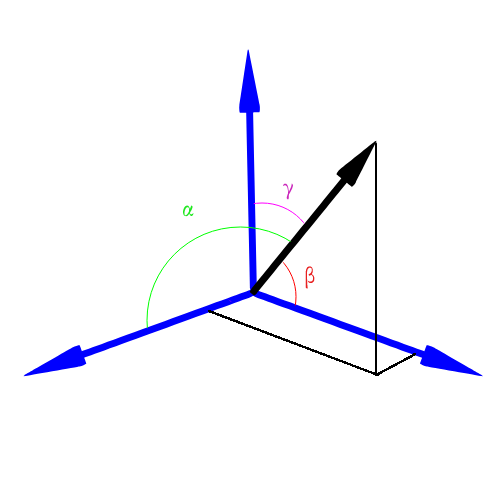
## Το μέγεθος ενός διανύσματος 3D, παρόμοια με ένα 2D διάνυσμα, είναι το μήκος του τμήματος που το ορίζει. Είναι πάντα ένας θετικός αριθμός. Το μηδενικό διάνυσμα είναι το μόνο διάνυσμα με μέγεθος ίσο με 0.

## Ο τύπος για τον υπολογισμό του μεγέθους ενός διανύσματος 3D είναι οακόλουθος:

## → →

### Κατεύθυνση

Κάθε 3D διάνυσμα έχει επίσης μια κατεύθυνση, η οποία ορίζεται ως η γωνία που γίνεται από το διάνυσμα με τα τρία διανύσματα στην κανονική βάση, τα οποία είναι (1,0,0) , (0,1,0) και (0,0,1).



**Σχήμα 2**. α, β και γ είναι οι γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα u με κάθε άξονα

# Διανυσματική Μορφή

## Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Το τυπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από τους τρεις άξονες (x,y,z), οι οποίοι είναι αμοιβαία κάθετοι. Με αυτούς τους άξονες σε οποιοδήποτε σημείο στο διάστημα μπορούν να εκχωρηθούν τρεις συντεταγμένες:

Όπως αναφέρεταιp reviously, εκχωρούμε συντεταγμένες ενός διανύσματος v βάζοντας την ουρά του ( σημείο A ) στην αρχή και γράφουμε τις συντεταγμένες του σημείου στην κορυφή του ( σημείο B ). Ο συμβολισμός:

υποδηλώνει ότι το διάνυσμα v μπορεί να περιγραφεί από τρεις πραγματικές συντεταγμένες.

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι καρτεσιανών συντεταγμένων: **δεξιόχειρες** και **αριστερόχειρες**, ανάλογα με την κατεύθυνση του άξονα z.

### Μοναδιαίοι φορείς του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων

Τοδιάνυσμα 3D e μπορεί να δηλωθεί σε σχέση με τα μοναδιαία διανύσματα **i =** (1,0,0), **j =** (0,1,0) και **k =** (0,0,1). Αυτά είναι τα μοναδιαία διανύσματα που αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα τον άξονα x, τον άξονα y και τον άξονα z. Το 3D διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα αυτών των τριών διανυσμάτων, καθένα από τα *οποία ζυγίζεται* από την αντίστοιχη τιμή σε x,y και z:

## → → → →

### Λειτουργίες

Οι μαθηματικές πράξεις μεταξύ τρισδιάστατων διανυσμάτων εκτελούνται συστατικό προς συστατικό.

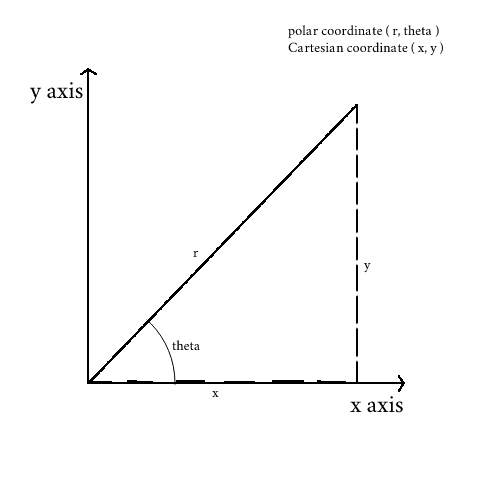
**Άθροισμα:**

**Διαφορά:**

**Πολλαπλασιασμός με έναν αριθμό:**

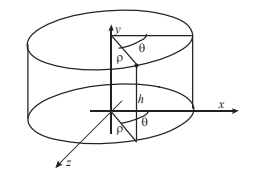
## Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Στο 2D, το πολικό σύστημα συντεταγμένων αναγνωρίζει ένα σημείο στο επίπεδο από ένα ζεύγος συντεταγμένων, το πρώτο είναι το μήκος της γραμμής **r** που συνδέει το σημείο με την αρχή, το δεύτερο είναι η γωνία **θ** που σχηματίζει αυτή η γραμμή με μια σταθερή γραμμή ( συνήθως ο άξονας x ).



**Εικόνα 3**. 2D σύστημα πολικών συντεταγμένων ( r, θ ) και καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ( x,y )

Στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων προσθέτουμε το ύψος **h** στις πολικές συντεταγμένες.



**Εικόνα 4**. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ( ρ, θ, h ) [1]

## Ομοιογενές σύστημα συντεταγμένων

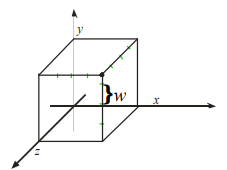
Στο ομοιογενές σύστημα συντεταγμένων ένα σημείο περιγράφεται από 4 αριθμούς, **x,y,z** και **w**. Ενώ τα x,y και z είναι οι τυπικές καρτεσιανές συντεταγμένες, το w μπορεί να θεωρηθεί ως κλίμακα. Με αυτό το σύστημα ένα σημείο αντιστοιχεί σε περισσότερα από ένα τεταρτημόρια.

Για να αποκτήσετε το καρτεσιανό ισοδύναμο πρέπει να διαιρέσετε τα τρία πρώτα συστατικά με το τελευταίο:

(2,2,2,1) → (2/1, 2/1, 2/1) → (2,2,2)

(1,1,1,0.5) → (1/0.5, 1/0.5, 1/0.5) → (2,2,2)

(4,4,4,2) → (4/2, 4/2, 4/2) → (2,2,2)



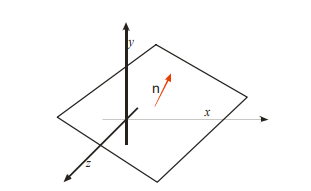
**Εικόνα 5**. Ομοιογενές σύστημα συντεταγμένων ( x,y,z,w ) [1]

## Πληθικός Αριθμός

Όπως καταλάβαμε από τα προηγούμενα κεφάλαια, υπάρχουν περισσότερες από μία μέθοδοι για την αναπαράσταση ενός διανύσματος σε 3D χώρο. Το διάνυσμα αντιπροσωπεύεται πάντα από μια συλλογή αριθμών, που ονομάζουμε **στοιχεία**. Ο αριθμός των συνιστωσών ενός διανύσματος ονομάζεται **πληθικός** αριθμός (ή διάσταση). Ένα διάνυσμα με πληθικότητα 3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να το αναπαραστήσει σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ή σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, ενώ ένα διάνυσμα με πληθικότητα 4 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να το αναπαραστήσει σε ένα ομοιογενές σύστημα συντεταγμένων.

## Διανύσματα και επίπεδα

Τα διανύσματα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την αναγνώριση ενός επιπέδου μέσα στον 3D χώρο, πιο συγκεκριμένα ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια του επιπέδου αναγνωρίζει μονοσήμαντα το τελευταίο και ονομάζεται **φυσιολογικό**.



**Εικόνα 6**. Το διάνυσμα **n** είναι κάθετο στην επιφάνειατου επιπέδου και ονομάζεται **κανονικό** [1]

# 

# Λυμένα προβλήματα

1. Υπολογίστε το μέγεθος των ακόλουθων διανυσμάτων, εκφρασμένο στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

* []
* []
* []
* []

1. Υπολογίστε τις ακόλουθες διανυσματικές πράξεις:

* []

x = 1+3 ; υ = 2+3 ; ζ = 4+3

* []

x = 5-1 ; y = 1-1 ; z = 1+0

* []

x = 8-3 ; y = 15-63 , z = 10-10

* []

x = 1-3 ; y = -1-6 , z = 5-0

* []

x = 3\*1 ; υ = 3\*2 ; ζ = 3\*6

* []

x = -1\*5 ; υ = -1\*4 ; ζ = -1\*-1

1. Λάβετε το καρτεσιανό ισοδύναμο των ακόλουθων διανυσμάτων που εκφράζονται μέσω ομοιογενούς συστήματος συντεταγμένων:

* []

(3/1, 3/1, 3/1)

* []

(2/2, 4/2, 2/2)

* []

(15/5, 5/5, 10/5)

* []

(4/2, -5/2, 3/2)

* []

(2/(5/2), 4/(5/2), 5/(5/2))

(2\*⅖, 4\*⅖, 5\*⅖)

# Αναφορές

[1]: <http://www.di.unito.it/~marcog/IG/2003/Lezione10.pdf>