

Vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaattijärjestelmässä

Sisällys

Vektorit kolmiulotteisessa avaruudessa

Mikä on kolmiulotteinen vektori

Kolmiulotteisen vektorin komponentit

Suuruus 3

Suunta 4

Vektoriesitys

Karteesinen koordinaatisto 4

Karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit

Laskutoimitukset 5

Lieriökoordinaatisto 6

Homogeeninen koordinaatisto 7

Mahtavuus eli kardinaliteetti 8

Vektorit ja tasot

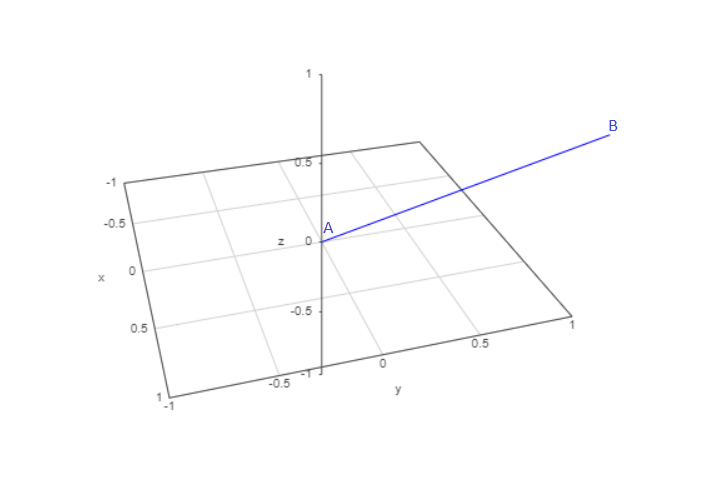
Esimerkkitehtävät **9**

Viitteet **11**

# Vektorit kolmiulotteisessa avaruudessa

## Mikä on kolmiulotteinen vektori?

## Kolmiulotteista vektoria eli 3D-vektoria edustaa kolmiulotteisessa koordinaatistossa jana, joka kulkee pisteestä A pisteeseen B.



**Kuvio 1**. Vektoriesitys kolmiulotteisessa karteesisessa koordinaattijärjestelmässä

## 3D-vektorin komponentit

## Kolmiulotteisessa ympäristössä työskennellään kolmella koordinaattitasolla: x-akselilla, y-akselilla ja z-akselilla.

Oletetaan esimerkiksi, että piste A on (0,0,0). Luodaan näin vektori ilmoittamalla pisteen B tiedot. → ← tämä on vektori, joka kulkee pisteestä (0,0,0) pisteeseen (1,2,-3)

### Suuruus

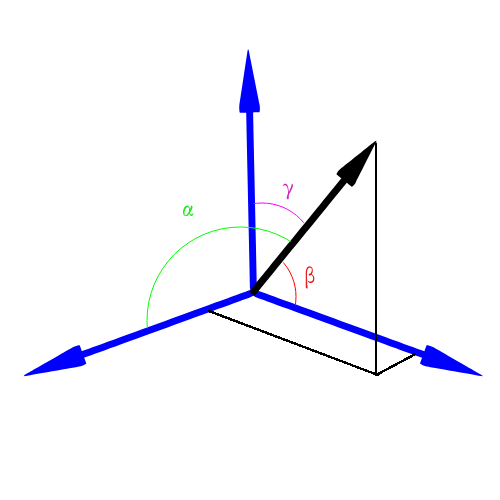
## 3D-vektorin suuruudella 2D-vektorin tavoin tarkoitetaan sitä määrittelevän janan pituutta. Suuruuden arvo on aina positiivinen. Nollavektori on ainoa vektori, jonka suuruus on 0.

## Kaava, jolla voidaan laskea 3D-vektorin suuruus on seuraava:

## → →

### Suunta

Jokaisella kolmiulotteisella vektorilla on myös suunta. Suunnalla tarkoitetaan sitä kulmaa, jonka vektori muodostaa vakioperustan (the canonical basis) kolmen vektorin kanssa, jotka ovat (1,0,0) , (0,1,0) ja (0,0,1).



**Kuvio 2**. α, β ja γ ovat ne kulmat, jotka vektori u muodostaa kunkin akselin kanssa.

# Vektoriesitys

## Karteesinen koordinaatisto

Tavallinen karteesinen koordinaatisto koostuu kolmesta akselista (x,y,z), jotka ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. Näiden akselien avulla voidaan antaa mille tahansa avaruuden pisteelle kolme koordinaattia:

Kuten aiemmin kerrottiin, vektorille v annetaan koordinaatit asettamalla sen häntä (piste A) origoon ja ilmoittamalla vektorin koordinaatit sen kärjessä (piste B). Merkitään:

tarkoittaa, että vektoria v voidaan kuvata kolmella reaalikoordinaatilla.

Karteesisia koordinaatteja on kahta eri tyyppiä: oikeakätisiä ja vasenkätisiä riippuen z-akselin suunnasta.

### Karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit

Kolmiulotteinen vektori voidaan merkitä yksikkövektoreiden i = (1,0,0), j = (0,1,0) ja k = (0,0,1) avulla. Nämä ovat yksikkövektorit, jotka edustavat x-akselia, y-akselia ja z-akselia. Kolmiulotteinen vektori voidaan ilmaista näiden kolmen vektorin summana. Jokainen vektoreista on *painotettu* vastaavalla x-, y- ja z-arvolla:

## → → → →

### Laskutoimitukset

Matemaattiset laskutoimitukset kolmiulotteisten vektoreiden välillä suoritetaan komponenteittain.

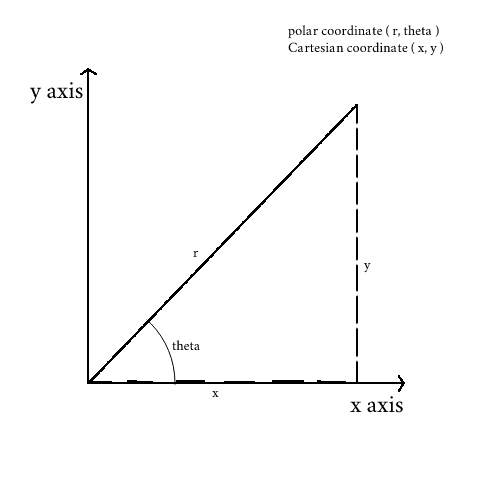
**Summa:**

**Erotus:**

**Kertolasku luvulla:**

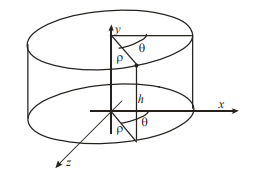
## Lieriökoordinaatisto

Kaksiulotteisessa avaruudessa napakoordinaatisto määrittää tason pisteen koordinaattiparilla, joista ensimmäinen on pisteen ja origon yhdistävän suoran r pituus ja toinen on kulma θ, jonka tämä viiva muodostaa kiinteän suoran (yleensä x-akselin) kanssa.



**Kuvio 3**. Kaksiulotteinen napaikoordinaatisto ( r, θ ) ja karteesinen koordinaatisto ( x,y ).

Lieriökoordinaatistossa napakoordinaatteihin lisätään korkeus **h**.



**Kuvio 4**. Lieriökoordinaatisto ( ρ, θ, h ) [1].

## Homogeeninen koordinaatisto

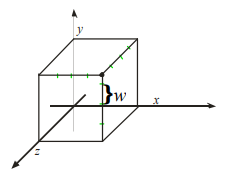
Homogeenisessa koordinaatistossa yhtä pistettä kuvataan neljällä luvulla: **x**, **y**, **z** ja **w**. Siinä missä x, y ja z ovat tavanomaisia karteesisia koordinaatteja, w voidaan käsittää asteikkona. Tässä järjestelmässä yksi piste vastaa useampaa kuin yhtä kvaternionia.

Kun koordinaateille halutaan saada karteesinen koordinaattivastine, on kolme ensimmäistä komponenttia jaettava viimeisellä:

(2,2,2,1) → (2/1, 2/1, 2/1) → (2,2,2)

(1,1,1,0.5) → (1/0.5, 1/0.5, 1/0.5) → (2,2,2)

(4,4,4,2) → (4/2, 4/2, 4/2) → (2,2,2)



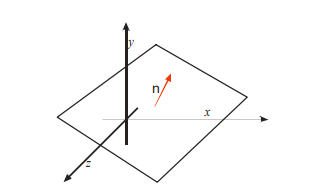
**Kuvio 5**. Homogeeninen koordinaatisto ( x,y,z,w ) [1].

## Mahtavuus eli kardinaliteetti

Kuten aiemmissa luvuissa todettiin, vektorin esittämiseen kolmiulotteisessa avaruudessa on olemassa useampi kuin yksi menetelmä. Vektoria edustaa aina kokoelma numeroita, joita kutsumme komponenteiksi. Vektorin komponenttien lukumäärää kutsutaan sen mahtavuudeksi eli kardinaliteetiksi (tai ulottuvuudeksi). Vektoria, jonka kardinaaliteetti on kolme voidaan käyttää sen esittämiseen karteesisessa koordinaatistossa tai lieriökoordinaatistossa, kun taas vektoria, jonka kardinaaliteetti on neljä, voidaan käyttää sen esittämiseen homogeenisessa koordinaatistossa.

## Vektorit ja tasot

Vektoreita voidaan käyttää myös kolmiulotteisen avaruuden sisällä olevan tason tunnistamisessa. Tarkemmin sanottuna vektori, joka on kohtisuorassa tason pintaa vastaan, tunnistaa tason yksiselitteisesti. Sitä kutsutaan tällöin **normaaliksi**.



**Kuvio 6**. Vektori n on kohtisuorassa tason pintaa vasten, jolloin sitä kutsutaan normaaliksi [1].

# Esimerkkitehtävät

1. Laske seuraavien vektoreiden suuruus karteesisessa koordinaatistossa ilmaistuna:

* []
* []
* []
* []

1. Laske seuraavat vektorien laskutoimitukset:

* []

x = 1+3 ; y = 2+3 ; z = 4+3

* []

x = 5-1 ; y = 1-1 ; z = 1+0

* []

x = 8-3 ; y = 15-63 ; z = 10-10

* []

x = 1-3 ; y = -1-6 ; z = 5-0

* []

x = 3\*1 ; y = 3\*2 ; z = 3\*6

* []

x = -1\*5 ; y = -1\*4 ; z = -1\*-1

1. Määritä seuraavien vektoreiden karteesinen vastine homogeenisen koordinaatiston avulla ilmaistuna:

* []

(3/1, 3/1, 3/1)

* []

(2/2, 4/2, 2/2)

* []

(15/5, 5/5, 10/5)

* []

(4/2, -5/2, 3/2)

* []

(2/(5/2), 4/(5/2), 5/(5/2))

(2\*⅖, 4\*⅖, 5\*⅖)

# Viitteet

[1]: <http://www.di.unito.it/~marcog/IG/2003/Lezione10.pdf>