**Logo, company name

Description automatically generated**

**Derivaatan ja johdettujen funktioiden geometrinen tulkinta**

**Koululuokka: K12**

**Sisältö**

[JOHDANNAISEN GEOMETRIINEN TULKINTA 3](#_Toc126245287)

[JOHDANNAISET TOIMINNOT 10](#_Toc126245288)

[Käyrän tangenttiongelma 11](#_Toc126245289)

[Johdettavuus ja jatkuvuus 13](#_Toc126245290)

[Lateraaliset johdannaiset 14](#_Toc126245291)

[Johdettu vasemmalle 14](#_Toc126245292)

[Johdettu oikealle 15](#_Toc126245293)

[Funktion derivaatan määritelmä pisteessä 15](#_Toc126245294)

[Huomautukset 16](#_Toc126245295)

[Taulukko alkeisfunktioiden johdannaisilla 17](#_Toc126245296)

[Toiminnot johdettavissa olevilla funktioilla 18](#_Toc126245297)

[Johtopäätökset 19](#_Toc126245298)

[Lähteet 20](#_Toc126245299)

[Työarkki 21](#_Toc126245300)

# ****JOHDANNAISEN GEOMETRIINEN TULKINTA****

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

1. Jos f’(x0)=∞, silloin graafi sallii pystysuuntaisen puolitangentin

Kohdan M alla.

2) Jos f’(x0)=-∞, silloin kuvaaja sallii pystysuuntaisen puolitangentin pisteen M yläpuolella.

**Diagram, schematic

Description automatically generated**

3) Jos fd’(x0)=∞, silloin kuvaaja sallii pystysuuntaisen puolitangentin pisteen M yläpuolella.

**Diagram

Description automatically generated**

4) Jos fd’(x0)=∞, silloin kuvaaja sallii pystysuuntaisen puolitangentin pisteen M alapuolella.

**Diagram

Description automatically generated**

5) Jos lateraaliset derivaatat ovat yhtä suuret fd’(x0)=fs’(x0), silloin kaksi tangenttia ovat laajennuksessa. Tässä tapauksessa M on käännepiste (tangentti ylittää funktion kaavion).

**A picture containing text, music

Description automatically generated**

**A picture containing text, linedrawing

Description automatically generated**

Määritelmä. Sanotaan, että x0 on funktion f käännepiste, jos funktio on jatkuva kohdassa x0, sillä on derivaatta kohdassa x0, (äärellinen tai ääretön)

ja jos kuvaaja on kartio (kovera) x0:n toisella puolella ja kovera (kupera) toisella puolella.

6) Jos lateraaliset derivaatat ovat erilaisia ​​ja fd’(x0)=+∞,fs’(x0)=- ∞, sau fd’(x0)=-∞,fs’(x0)=+∞, silloin kaksi puoliagenttia menevät päällekkäin ja M on käännekohta.

**Chart

Description automatically generated with low confidence**

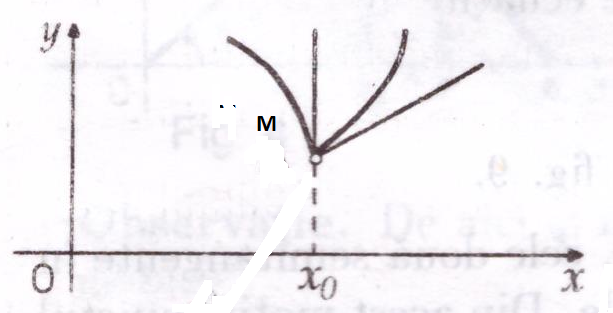
**A picture containing diagram

Description automatically generated**

7) Jos lateraaliset derivaatat ovat erilaisia ​​ja ainakin yksi on äärellinen, niin M on kulmapiste.

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

****

**Asia 1) fs’(x0)=-∞, fd’(x0)ϵR**

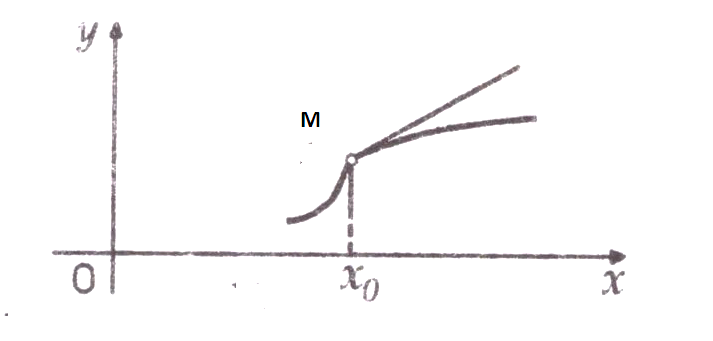
**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Asia 2) fs’(x0)=+∞, fd’(x0)ϵR**

**Diagram

Description automatically generated**

****

**Diagram

Description automatically generated with medium confidenceA picture containing diagram

Description automatically generated**

**Asia 3) fd’(x0)=+∞, fs’(x0)ϵR**

**Asia 4) fd’(x0)=-∞, fs’(x0)ϵR**

**A picture containing text

Description automatically generated**

**Diagram

Description automatically generated with medium confidence**

**Asia 5) fd’(x0), fs’(x0)ϵR și fd’(x0)≠fs’(x0)**

**A picture containing diagram

Description automatically generated**

# ****JOHDANNAISET TOIMINNOT****

**Derivaatan käsitteen esitteli ja käytti matematiikassa tiedemies Isaac Newton (1642 – 1724) mekaniikan tutkimuksen yhteydessä.**

**Mobiililaitteen hetkellisen nopeuden ongelma**

**matkaviestimen keskinopeus aikavälillä [t0, t] on**

****

**matkaviestimen hetkellinen nopeus hetkellä t0 (kiinteä), t0 > 0 on:**

****

**matkapuhelimen kiihtyvyys kiinteällä hetkellä t0 on:**

****

**Melkein samaan aikaan tiedemies Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) esitteli derivaatan käsitteen käyrän jossakin pisteessä olevan tangentin tutkimuksen yhteydessä.**

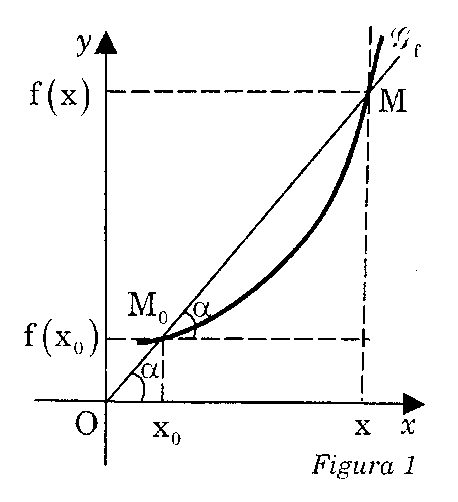
# ****Käyrän tangenttiongelma****

**Jos f:(a,b)🡪R, jatkuva funktio ja M0(x0;f(x0)) grafiikassa, Gf f:ssä.**

**Sekantin M0M kaltevuus edustaa sen muodostaman kulman trigonometristä tangenttia Ox-akselin positiivisen suunnan kanssa.**

****

**Käyrän Gf pisteen M0 tangentin kaltevuus tai kulmakerroin on:**

****

**Tangentti pisteessä M0(x0,f(x0)) saadaan yhtälöstä:**

****

****

**Relaatio (1) on kirjoitettu::**

**ja sitä kutsutaan funktion f derivaatiksi pisteessä x0.**

**Anna toiminnon f:D🡪R, D🡪R, x0 Є D väkijoukon kerääntymispiste D.**

**Funktiolla f sanotaan olevan derivaatta pisteessä x0 Є D, jos raja on olemassa:**

****

**Tätä rajaa kutsutaan funktion f derivaatiksi pisteessä x0 ja se kirjoitetaan:**

****

**Se sanoo, että funktio f on differentioituva pisteessä x0 Є D, jos alla oleva raja on olemassa ja on äärellinen:**

****

# ****Johdettavuus ja jatkuvuus****

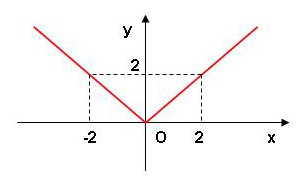
**Mikä tahansa pisteessä differentioituva funktio on jatkuva siinä pisteessä.**

**Huomautukset:**

**Numeerinen funktio voi olla jatkuva jossakin pisteessä olematta differentioituva siinä pisteessä.**

**Esimerkki:**

**Mode-toiminto f : R🡪R, f(x) =|x| on jatkuva kohdassa x0 = 0 eikä ole differentioituva pisteessä x0 = 0.**

****

**Mikään epäjatkuva funktio jossakin pisteessä ei ole differentioitavissa tässä vaiheessa.**

**On toimintoja, jotka ovat epäjatkuvia jossakin pisteessä ja joilla on derivaatta tässä pisteessä.**

**Esimerkki:**

**Toiminto f : R🡪R, alla, on epäjatkuva x0 = 0 ja f’(0) = + ∞.**

****

# ****Lateraaliset johdannaiset****

**Olkoon funktio f:D🡪R ja x0 Є D.**

# ****Johdettu vasemmalle****

****

# ****Johdettu oikealle****

****

**Funktiolla f on derivaatta ja se on differentioitavissa x0:ssa silloin ja vain jos sillä on lateraaliset derivaatat ja se on vastaavasti vasen ja oikea differentioitavissa x0:ssa ja:**

****

# ****Funktion derivaatan määritelmä pisteessä****

**Onko f:ER jossa E on intervalli tai intervallien liitto R**

**Sanotaan, että funktiolla f on derivaatta ** **jos raja  on olemassa **

**Tässä tapauksessa tämä raja on merkitty  ja sitä kutsutaan funktion f in derivaatiksi **

**Niin **

**Funktion f sanotaan johdettuna in ** **jos raja  on olemassa R**

**(olemassa ja on rajallinen)**

**Tässä tapauksessa tämä raja on merkitty , nimittäin **

**Funktion f sanotaan olevan differentioituva välissä I, jos se on differentioituva intervallin I jokaisessa pisteessä.**

# ****Huomautukset****

**Funktiolla f on derivaatta in x0 ** **f ovat derivaatta laterale în x0 ja**

****

**(  on olemassa  ;  on olemassa  )**

# ****Taulukko alkeisfunktioiden johdannaisilla****

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **TOIMINTO** | **DERIVATIVE** | **ERITTELYYN ALA** | **KOOSTETTU TOIMINTO** | **JOHDANNAIS** |
| **c (constant)** | **0** |  |  |  |
| **x** | **1** |  | **u** |  |
| **x** |  |  |  |  |
| **x**  **( )** |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| **ln x** |  |  | **ln u** |  |
|  |  |  |  |  |
| **sin x** | **cos x** |  | **sin u** | **cos u** |
| **cos x** | **- sin x** |  | **cos u** | **- sin u** |
| **tg x** |  | **cos x** | **tg u (cos u)** |  |
| **ctg x** | **-** | **sin x** | **ctg u (sin u)** |  |
| **arcsin x** |  | **(-1;1)** | **arcsin u** |  |
| **arccos x** | **-** | **(-1;1)** | **arccos u** |  |
| **arctg x** |  |  | **arctg u** |  |
| **arcctg x** | **-** |  | **arcctg u** |  |

# ****Toiminnot johdettavissa olevilla funktioilla****

****

****

****

****

** ( c = constant)**

****

****

****

# ****Johtopäätökset****

**Toimintojen tutkiminen yleensä, jatkuvien, johdettavissa olevien funktioiden tutkiminen erityisesti edellyttää yleisten ja erityisten taitojen kehittämistä, jotka näkyvät:**

**Numeerisen funktion ominaisuuksien graafinen/visuaalinen tunnistus, joka koskee: rajoittuneisuutta, jatkuvuutta, asymptoottista taipumusta, johdettavuutta;**

**Ongelmatilanteesta poimittujen tietojen yhdistäminen tutkittujen numeeristen funktioiden ominaisuuksiin, kuten: konvergenssilauseet, rajaoperaatiot, tyyppirajat, johtotaulukot;**

**Tiettyjen algoritmien soveltaminen, differentiaalilaskenta, joidenkin ongelmien ratkaisemisessa ja tiettyjen prosessien mallintamisessa, tietyillä toiminta-alueilla;**

**Numeeristen funktioiden avulla mallinnettavissa olevien konkreettisten lauseiden ilmaisu matemaattisen analyysin kielellä;**

**Graafiseen lukemiseen perustuva tulkinta joidenkin funktioiden ominaisuuksista, jotka edustavat esimerkkejä taloudelliselta, sosiaaliselta, tieteelliseltä alalta;**

**Laskemalla saatujen tulosten kokeellinen verifiointi matemaattisesti ilmaistavien käytännön ongelmien varalta;**

**Tilanneoptimien määrittäminen differentiaalilaskennan avulla joidenkin toiminta-alojen käytännön tai erityistehtävissä.**

**Funktion derivaatan hyödyllisiä sovelluksia**

**määritetään tietyn funktion monotonisuusvälit (nouseeko vai laskeeko funktio) – tämä tehdään tutkimalla funktion ensimmäisen derivaatan etumerkkiä;**

**ääripisteiden määrittäminen laajennetun numeeristen funktioiden luokan osalta - tämä tehdään tutkimalla funktion ensimmäisen derivaatan etumerkkiä;**

**Teoreettiset tulokset funktion monotonisuudesta ja ääripisteistä mahdollistavat joidenkin epäyhtälöiden saamisen, joita alkeismenetelmien avulla olisi vaikea todistaa;**

**funktion kuperuuden tai koveruuden välien määrittäminen - tämä tehdään tutkimalla funktion toisen derivaatan etumerkkiä;**

**johdettavuuden avulla voidaan määrittää polynomiyhtälön juurien monikerroisuusjärjestys tai välit, joista polynomifunktioon liittyvän yhtälön juuret löytyvät.**

# ****Lähteet****

**Gheorghe Cârjă, Ovidiu Cârjă – Analiză matematică, Culegere de probleme rezolvate şi Commentate, Editura GIL, Zalău, 2003;**

**Lia Aramă, Toader Morozan – Matemaattisten analyysien ongelmat, Editura Universal Pan, Bucureşti, 1997;**

**Marius Burtea, Georgeta Burtea – Matematică, manual pentru clasa a XI-a, Editura Carminis, Piteşti, 2006;**

**Mircea Ganga – Matemaattisten käsikirjojen ongelmat XI-a:ssa, Editura MATHPRESS, Ploieşti, 2006.**

# Työarkki

1. Anna olla f : R → R, f(x)=-3+5
2. Laske
3. Laske f’(x)
4. Laske f’(-1) + f’’(-1)
5. Kirjoita funktion f kuvaajan tangentin yhtälö abskissapisteen kanssa
6. Laske
7. Laske
8. Määritä funktion f monotonisuuden välit ja ääripisteet.
9. Määritä käännepiste