

**Angolo tra vettori nel piano**

[**Introduzione**](#_heading=h.cvn5c8cx8rlz) **3**

[**Angolo tra due vettori mediante il prodotto dei punti**](#_heading=h.int86pskt9cv) **5**

[**Angolo tra due vettori mediante il prodotto incrociato**](#_heading=h.k6vk1iy0lax6) **6**

[**Problemi risolti**](#_heading=h.xs1kohmnrd88) **9**

[Esempio 1](#_heading=h.1fob9te) 9

[Esempio 2](#_heading=h.190brkc6j781) 10

[Esempio 3](#_heading=h.1totoj8ebbng) 11

[**Esercizi di valutazione Nazionali**](#_heading=h.exj9y38wcwe1) **12**

# Introduzione

I vettori hanno un'importanza significativa nella geometria vettoriale e nella fisica. In particolare, la direzione dei vettori e gli angoli a cui sono orientati sono fondamentali per determinare l'effetto che avrà la combinazione di questi vettori.

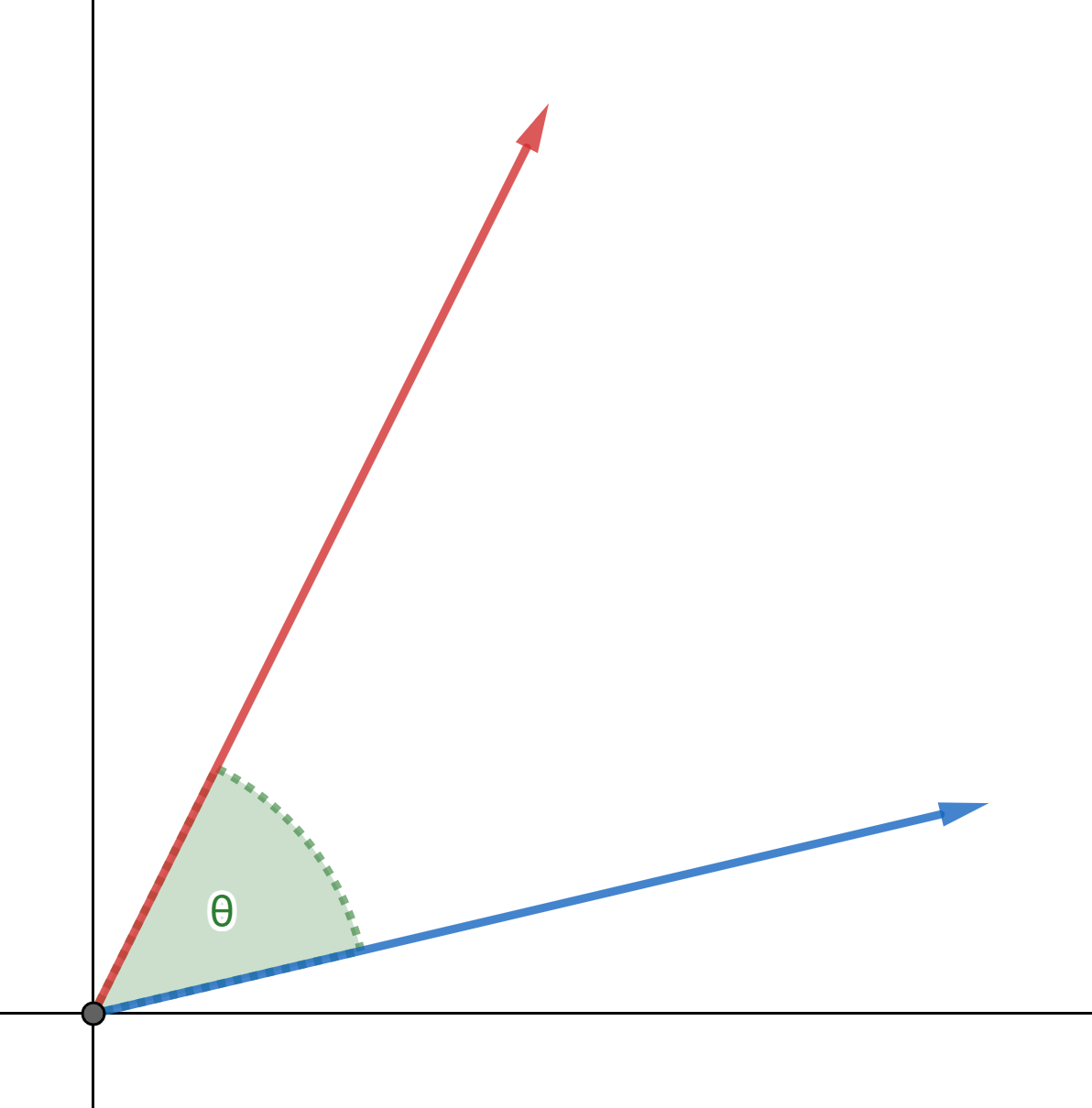
Per esempio, se studiamo il movimento di un pallone da calcio durante una partita, la sua posizione rispetto al centro del campo può essere descritta da un vettore posizione e il movimento da un vettore velocità la cui lunghezza indica la velocità del pallone, quindi sarà tanto più lunga quanto più veloce è il pallone. La direzione del vettore velocità spiega la direzione del movimento della palla.

A volte abbiamo a che fare con due vettori che agiscono sullo stesso oggetto, quindi l'angolo dei vettori è fondamentale. Nel mondo reale, qualsiasi sistema è soggetto a diversi vettori combinati insieme.

Se ci sono due vettori in un piano tali che le code di entrambi i vettori sono unite, allora possiamo definire l'angolo tra di essi come:

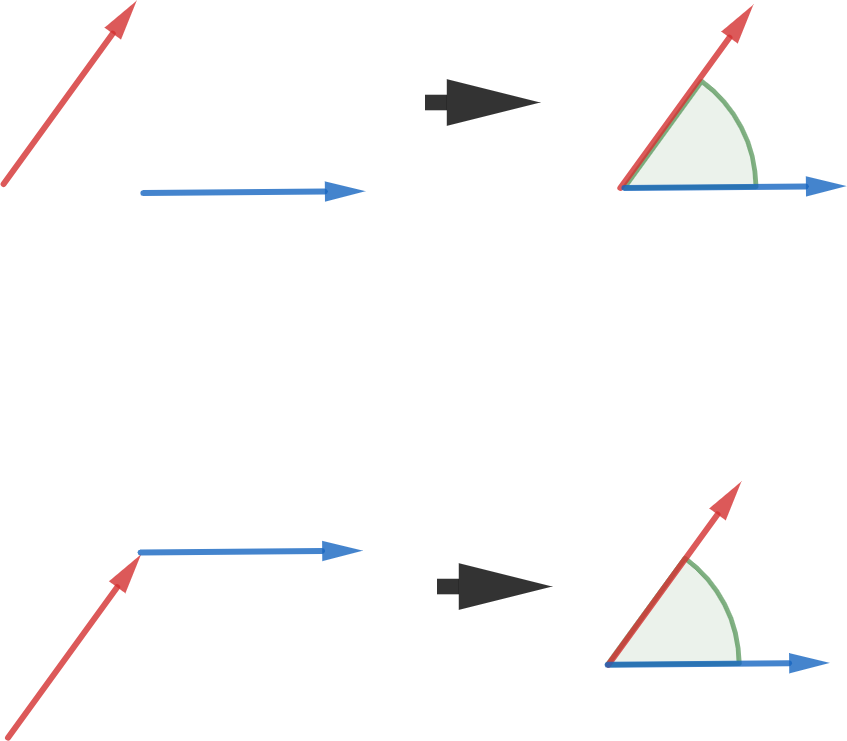
"L'angolo tra due vettori è l'angolo più corto con cui uno dei due vettori viene ruotato rispetto all'altro in modo che entrambi i vettori abbiano la stessa direzione".

La discussione sugli angoli vettoriali si concentra sulla ricerca dell'angolo più corto tra i vettori. In questa sede ci si concentrerà sull'angolo tra due vettori in posizione standard.

**

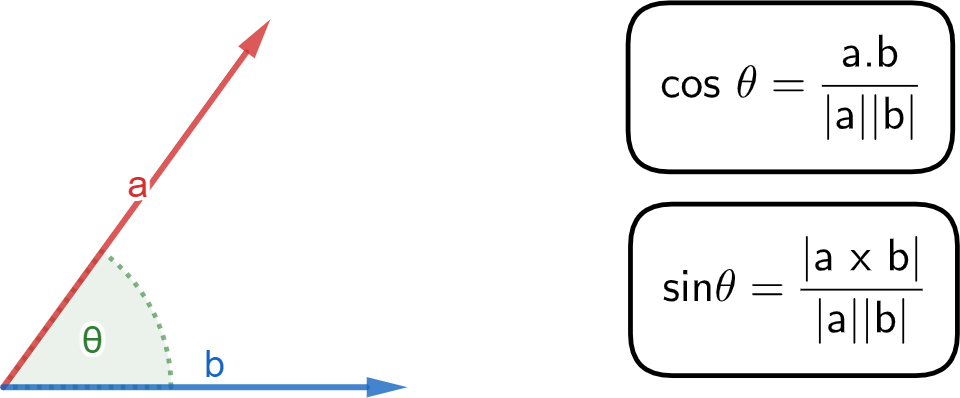
In altre parole, l'angolo tra due vettori è l'angolo tra le loro code. Si noti che l'angolo tra due vettori è sempre compreso tra 0° e 180°.

Se i vettori non sono uniti da coda a coda, è necessario unirli spostando uno dei vettori.



Attraverso la moltiplicazione vettoriale è possibile trovare l'angolo tra due vettori. Per risolvere la moltiplicazione vettoriale si possono utilizzare due metodi diversi: il prodotto scalare e il prodotto incrociato.

Attraverso il prodotto scalare di due vettori si ottiene una quantità scalare. D'altra parte, come suggerisce il nome, il prodotto vettoriale (o prodotto incrociato) tra due vettori produce una quantità vettoriale.



# Angolo tra due vettori mediante il prodotto dei punti

Consideriamo due vettori a e b separati da un angolo θ. La formula del prodotto del punto è:

dove a.b è il prodotto di due vettori. |a| e |b| sono le grandezze dei vettori a e b e θ è l'angolo che li separa.

La formula precedente afferma che il prodotto del punto di due vettori a e b è uguale al prodotto delle loro grandezze moltiplicato per il coseno dell'angolo.

Partiamo quindi dalla definizione di prodotto del punto per trovare il valore dell'angolo.

Iniziamo isolando il coseno:

Infine, per trovare l'angolo tra due vettori, a e b, risolveremo l'angolo θ,

Concentriamoci sul prodotto del punto, a tal fine consideriamo due vettori a e b

Il prodotto di punti tra due vettori a e b è dato da:

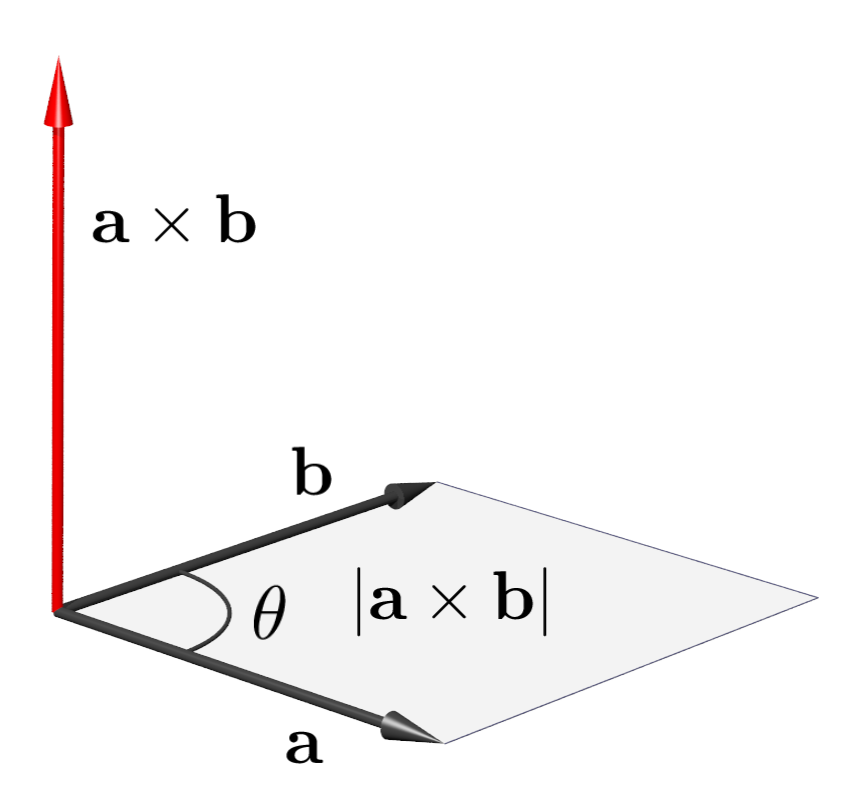
**. = +**

# Angolo tra due vettori mediante il prodotto incrociato

Un altro metodo per trovare l'angolo tra due vettori è il prodotto incrociato.

Il prodotto incrociato è definito come:

*"Il vettore che è perpendicolare a entrambi i vettori e la direzione è data dalla regola della mano destra". "*

**

La formula del prodotto incrociato è:

Dove θ è l'angolo tra due vettori, |a| e |b| sono le grandezze dei due vettori a e b, e n è il vettore unitario perpendicolare al piano contenente a e b. La sua direzione è data dalla regola della mano destra.

To solve this for θ, let us take magnitude of both members:

Ma poiché n è un vettore unitario, la sua grandezza è 1. Quindi si ottiene:

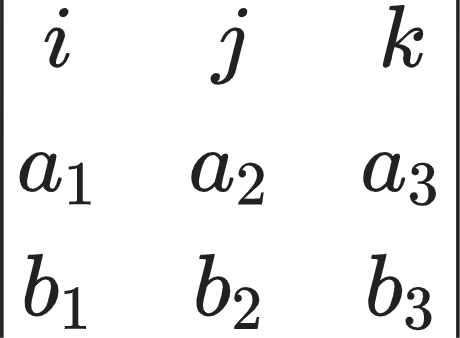
Isoliamo il sinθ per trovare l'angolo tra i due vettori

Infine possiamo ottenere l'angolo come:

Concentriamoci sul prodotto incrociato. Poiché utilizzeremo il prodotto incrociato, dobbiamo considerare anche la terza dimensione, perché il prodotto incrociato sarà un vettore perpendicolare al piano contenente a e b (quindi non rimarrà nel loro stesso piano).

In generale, quindi, possiamo prendere come esempio due vettori tridimensionali a e b: come ad esempio

Il prodotto incrociato può essere espresso come il determinante della matrice



dove <i, j, k> è una base ortonormale orientata positivamente.

Calcolando il determinante si ottiene

ottenendo così il seguente vettore

Nel nostro caso di studio, poiché stiamo considerando l'angolo tra vettori nel piano xy, possiamo semplificare la notazione di a e b impostando la loro terza componente a 0, in modo da renderli vettori bidimensionali. Teniamo presente che, come risultato dei prodotti incrociati, otterremo comunque un vettore perpendicolare, che sarà perpendicolare al piano xy contenente a e b. Se ricalcoliamo le formule precedenti considerando a e b come appartenenti al piano xy (quindi con a3=b3=0 ), otteniamo:

# Problemi risolti

## Esempio 1

*Compito:*

Trovare l'angolo tra i vettori a = <1, 2> e b = <-2, -1> utilizzando il prodotto dei punti.

*Soluzione:*

Sia θ l'angolo tra i vettori a e b.

Troviamo l'angolo θ tra i vettori utilizzando il prodotto dei punti.

Per utilizzare la formula dobbiamo calcolare il prodotto di punti e le grandezze di entrambi i vettori.

Ora possiamo calcolare l'angolo come:

**143.13°**

## Esempio 2

*Compito:*

Trovare l'angolo tra i vettori a = <1, 2> e b = <-2, -1> utilizzando il prodotto incrociato.

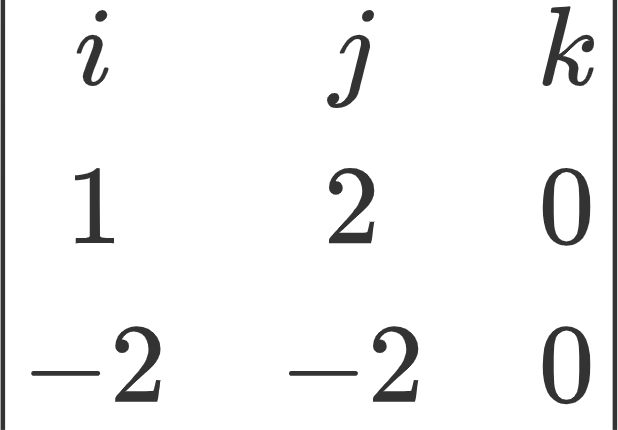
*Soluzione:*

Sia θ l'angolo tra a e b. Troviamo l'angolo θ tra vettori utilizzando il prodotto incrociato.

Poiché utilizzeremo il prodotto incrociato, dobbiamo considerare la terza dimensione, quindi dobbiamo estendere i nostri vettori alla terza dimensione.

Aggiornare la notazione di a e b:

Calcoliamo il prodotto incrociato di a e b.



Ora troviamo la sua grandezza.

Ora vogliamo utilizzare la formula per ottenere il valore dell'angolo

Quindi si ottiene

Otteniamo θ ≈ 36,87 (oppure) 143,13° (= 180 - 36,87) (poiché il seno è positivo anche nel secondo quadrante).

## Esempio 3

*Compito:*

Trovare l'angolo tra i vettori a = <0, 5> e b = <2, 0> utilizzando il prodotto dei punti.

*Soluzione*

Sia θ l'angolo tra i vettori a e b.

Troviamo l'angolo θ tra i vettori utilizzando il prodotto dei punti.

Per utilizzare la formula dobbiamo calcolare il prodotto di punti e le grandezze di entrambi i vettori.

Ora possiamo calcolare l'angolo come:

**90°**

*Note*:

Ci sono alcune considerazioni che possono essere fatte per accelerare il raggiungimento di questa soluzione.

Innanzitutto il calcolo di a e b può essere semplificato, poiché si tratta di vettori monodimensionali (una delle loro componenti è 0) e quindi il loro modulo è uguale alla loro componente non nulla.

Inoltre il calcolo di a e b, anche se semplice, non è affatto necessario. Poiché abbiamo scoperto che a.b è uguale a 0 e questo sarà il numeratore dell'argomento arcoseno, non è necessario valutare anche il denominatore.

Ma, andando oltre, questo esercizio potrebbe essere risolto senza alcun calcolo, ma solo con considerazioni geometriche. Poiché a è un vettore verticale (la sua componente x è 0) e b è un vettore orizzontale (la sua componente y è 0), possiamo dedurre che sono vettori ortogonali, il che significa che l'angolo tra loro è di 90°.

# Esercizi di valutazione Nazionali

(Maturity Examination - Italy:

<https://drive.google.com/file/d/16bxAx7d0ts5zgr3P62qzGu0ZPoZ2aywl/view?usp=sharing>)

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è AB = 1 e il cui vertice C varia in modo che l’angolo

C Aˆ B si mantenga doppio dell’angolo A Bˆ C .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l’equazione del luogo geometrico γ descritto da C.

2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.

3. Si determini l’ampiezza dell’angolo A Bˆ C che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l’aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).

4. Si provi che se A Bˆ C = 36° allora AC=