

**Integrale nedefinite**

Clasă: F3-K11/K12

**Cuprins**

[Unele proprietăţi ale integralei nedefinite 2](#_Toc125490749)

[Tabelul integralelor nedefinite (primitive imediate) 3](#_Toc125490750)

[Integralele funcţiilor hiperbolice 5](#_Toc125490751)

[Teorema şi formulele de integrare prin părţi 6](#_Toc125490752)

[Teoreme şi formulele de integrare prin schimbare de variabilă (substituţie) pentru integrala nedefinită 7](#_Toc125490753)

[Sensul fizic al integralei nedefinite 8](#_Toc125490754)

[Test 9](#_Toc125490755)

# Unele proprietăţi ale integralei nedefinite

**Teorema 9:** Dacă funcţiile *f*: *I* →R şi ****: *I* →R admit primitive pe intervalul *I* şi funcţia *f* are derivata continuă pe intervalul *I*, atunci au loc următoarele proprietăţi:

1. 
2. , unde 
3. , unde 
4. , unde constanta 
5. 
6. , unde constanta 
7. , unde constanta 
8. 
9. 
10. .

# Tabelul integralelor nedefinite (primitive imediate)

1. , unde;
2. , unde;
3. , unde , şi sau ;
4. , unde , ,sau ;
5. , unde , ;
6. ,;
7. , undesau ;
8. , unde;
9. , unde;
10. , unde;
11. , unde ;
12. , unde;
13. , undeşi ;
14. , unde;
15. , unde ;
16. , unde sau ;
17. , unde sau şi ;
18. , unde sau ;
19. , unde sau şi ;
20. , unde ;
21. , unde ;
22. , unde şi ;
23. , unde şi ;
24. , unde  şi x2
25. , unde  şi x2
26. , unde şi 
27. , unde şi ;
28. , undeşi ;
29. ; 30) ;

# Integralele funcţiilor hiperbolice

a) ; b) ; c) ; d) .

31) , unde;

32) , unde;

33) , unde;

34) , unde sau ;

35) , unde \{1}.

36) +*C*, unde .

38) +*C*, unde .

# Teorema şi formulele de integrare prin părţi

**Teorema 10:** Dacă funcţiile ***f*:*I* →*R*** şi ***g*:*I* →*R*** sunt derivabile şi au derivata continuă pe intervalul *I*, atunci funcţiile şi admit primitive pe intervalul *I* şi are loc formula:

 (1)

**Remarcă:**Dacă notăm şi , atunci formula (1) capătă forma mai utilă:

 (2)

**• Formulele (1) şi (2) se numesc formulele integrării prin părţi pentru integrala nedefinită .**

# Teoreme şi formulele de integrare prin schimbare de variabilă (substituţie) pentru integrala nedefinită

**Teorema 11 (prima formulă de schimbare de variabilă):** Dacă funcţia este derivabilă pe intervalul *I*, iar funcţia  admite primitive pe intervalul *J* şi este o primitivă a funcţiei , atunci funcţia este o primitivă a funcţiei şi are loc formula



**Metoda substituţiei la calculare integralei nedefinite (prima metodă de schimbare de variabilă):**

a) Dacă se face substituţia 

= .

b) Dacă se face substituţia 

= .

**Teorema 12: (a doua formulă de schimbare de variabilă):** Dacă funcţia este bijectivă şi derivabilă pe intervalul *I,* funcţia  admite primitive pe intervalul *J* şi *H* este o primitivă a funcţiei , atunci funcţia admite primitive şi funcţia este o primitivă a funcţiei *f* şi are loc formula



**Remarcă:** Practic la calculare integralei nedefinite prin a doua metodă de schimbare de variabilă se notează , de unde se află şi se aplică formula:

.

# Sensul fizic al integralei nedefinite

**I sens fizic al integralei nedefinite:**

• Dacă un mobil (punct material) se deplasează neuniform şi legea deplasării lui este , iar legea variaţiei vitezei lui este , atunci:

1) Din sensul fizic al derivatei avem: ;

2) Din sensul fizic al integralei nedefinite avem: 

**II sens fizic al integralei nedefinite:**

• Dacă un mobil (punct material) se deplasează neuniform şi legea deplasării lui este , legea variaţiei vitezei lui este , iar legea variaţiei acceleraţiei lui este , atunci:

1) Din sensul fizic al derivatei avem: sau ;

2) Din sensul fizic al integralei nedefinite avem: ;

3) Din sensul fizic al integralei nedefinite avem: .

**III sens fizic al integralei nedefinite:**

Dacă un punct material se mişcă de-a lungul axei Ox sub acţiunea forţei , atunci legea variaţiei lucrului efectuat sub acţiunea forţei *F* este : .

# Test

Calculaţi integralele nedefinite:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Nr | | I variantă | II variantă | III variantă |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  | \* | |  |  |
|  | \* | |  |  |