

Uhol medzi vektormi v rovine

Obsah

[**Úvod**](#_heading=h.gjdgxs) **3**

[Uhol medzi dvoma vektormi pomocou bodového súčinu](#_heading=h.int86pskt9cv) **5**

[Uhol medzi dvoma vektormi pomocou krížového súčinu](#_heading=h.k6vk1iy0lax6) **6**

[**Vyriešené problémy**](#_heading=h.xs1kohmnrd88) **9**

[Príklad 1](#_heading=h.1fob9te) 9

[Príklad 2](#_heading=h.190brkc6j781) 10

[Príklad 3](#_heading=h.erdhqpgx4jq6) 12

[**Národné hodnotiace cvičenie**](#_heading=h.drhckcekq2u6) **13**

# Úvod

Vektory majú veľký význam vo vektorovej geometrii a fyzike. Najmä smer vektorov a uhly, pod ktorými sú orientované, sú rozhodujúce pri určovaní účinku, ktorý bude mať kombinácia týchto vektorov.

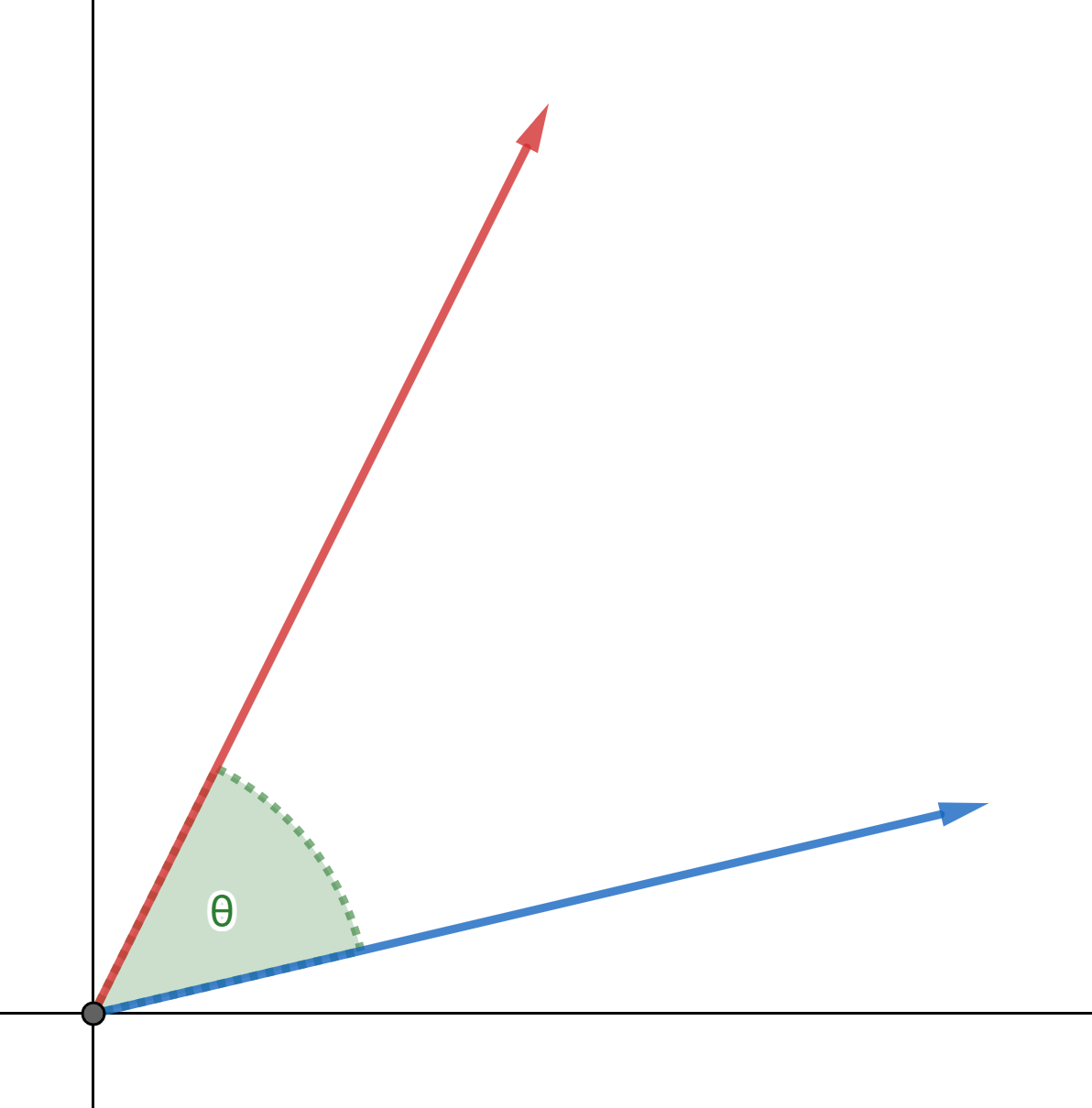
Ak napríklad skúmame pohyb futbalovej lopty počas hry, jej polohu vzhľadom na stred ihriska možno opísať polohovým vektorom a pohyb vektorom rýchlosti, ktorého dĺžka udáva rýchlosť lopty, takže bude tým dlhšia, čím rýchlejšie lopta letí. Smer vektora rýchlosti vysvetľuje smer pohybu lopty.

Niekedy máme do činenia s dvoma vektormi pôsobiacimi na ten istý objekt, takže uhol vektorov je rozhodujúci. V reálnom svete na akýkoľvek systém pôsobí viacero vektorov, ktoré sa navzájom kombinujú.

Ak v rovine existujú dva vektory, ktorých chvosty sú spojené, potom môžeme definovať uhol medzi nimi ako:

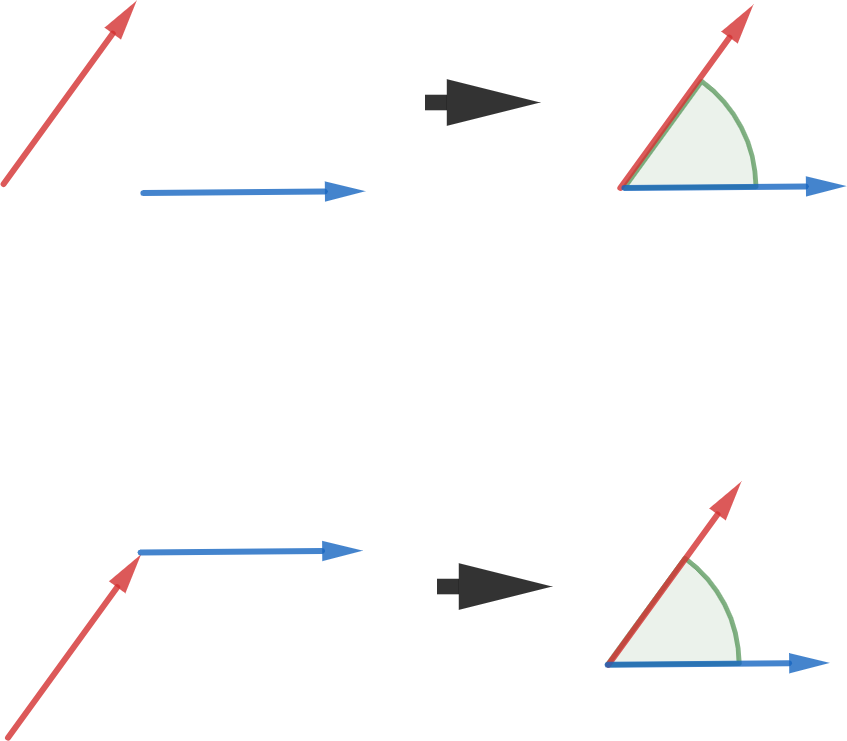
*"Uhol medzi dvoma vektormi je najkratší uhol, o ktorý je ktorýkoľvek z týchto dvoch vektorov otočený okolo druhého vektora tak, že oba vektory majú rovnaký smer."*

Diskusia o vektorových uhloch sa zameriava na hľadanie najkratšieho uhla medzi vektormi. Zameriame sa na uhol medzi dvoma vektormi v štandardnej polohe.   
  
*"O vektore sa hovorí, že je v štandardnej polohe, ak je jeho počiatočným bodom počiatok (0, 0)."*

**

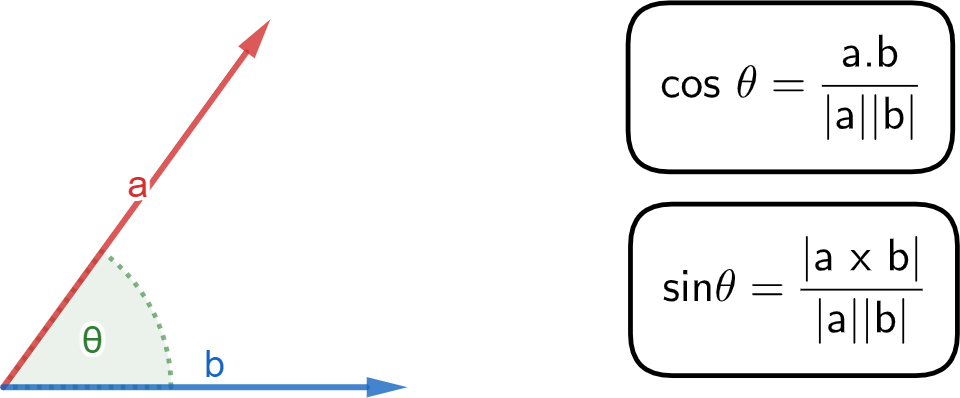
Inými slovami, uhol medzi dvoma vektormi je uhlom medzi ich chvostmi. Všimnite si, že uhol medzi dvoma vektormi je vždy medzi 0° a 180°.

Ak vektory nie sú spojené chvostom k chvostu, musíme ich spojiť posunutím jedného z vektorov.



Násobením vektorov je možné zistiť uhol medzi dvoma vektormi. Na riešenie vektorového násobenia možno použiť dve rôzne metódy: skalárny súčin a krížový súčin.

Skalárnym súčinom dvoch vektorov sa získa skalárna veličina. Na druhej strane, ako už názov napovedá, vektorový súčin (alebo krížový súčin) dvoch vektorov dáva vektorovú veličinu.



# Uhol medzi dvoma vektormi pomocou bodového súčinu

Uvažujme dva vektory a a b oddelené určitým uhlom θ. Vzorec bodového súčinu je:

kde **a.b** je bodový súčin dvoch vektorov. |a| a |b| sú veľkosti vektorov **a** a **b,**a θ je uhol medzi nimi.  
 Predchádzajúci vzorec hovorí, že bodový súčin dvoch vektorov a a b sa rovná súčinu ich magnitúd vynásobenému kosínusom uhla.  
 Vychádzame teda z definície bodového súčinu, aby sme našli hodnotu uhla.  
 Začnime izolovaním kosínusu:

Nakoniec, aby sme našli uhol medzi dvoma vektormi a a b, vyriešime uhol θ,

Zamerajme sa na bodový súčin, na tento účel uvažujme dva vektory **a** a **b**

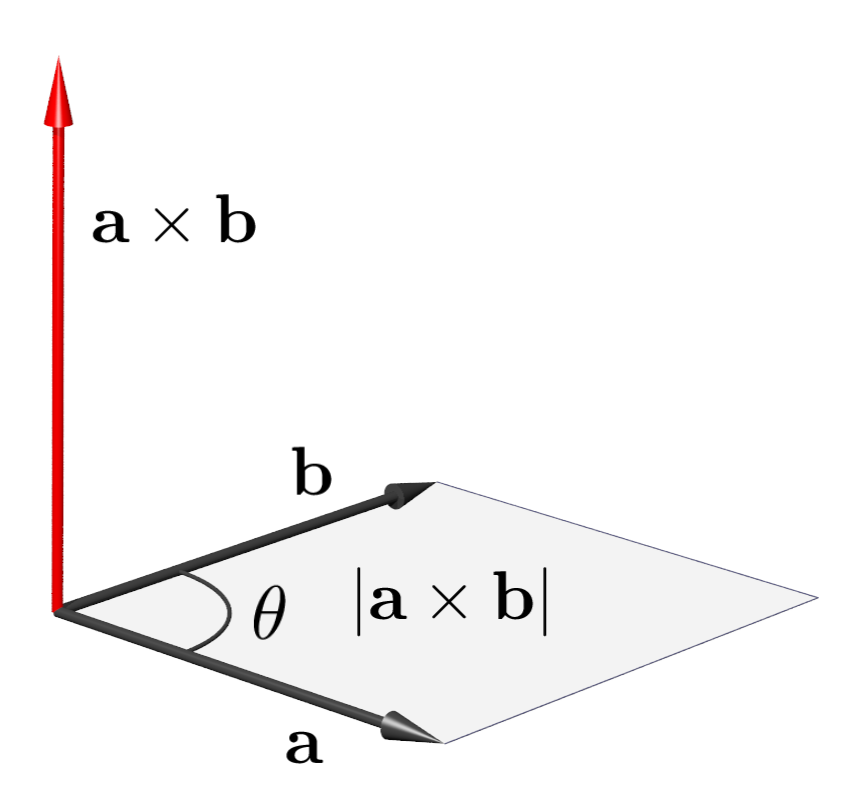
Potom bodový súčin dvoch vektorov **a a b** je daný ako:

**. = +**

# Uhol medzi dvoma vektormi pomocou krížového súčinu

Ďalšou metódou na zistenie uhla medzi dvoma vektormi je krížový súčin.  
 Krížový súčin je definovaný ako:

*"Vektor, ktorý je kolmý na oba vektory a smer, je daný pravidlom pravej ruky. "*

**

Vzorec krížového súčinu je:

Kde **θ** je uhol medzi dvoma vektormi, |a| a |b| sú veľkosti dvoch vektorov **a** a **b a n** je jednotkový vektor kolmý na rovinu obsahujúcu **a a b**. Jeho smer je daný pravidlom pravej ruky.

Aby sme to vyriešili pre θ, vezmime veľkosť oboch členov:

Ale keďže n je jednotkový vektor, jeho veľkosť je 1, takže dostaneme:

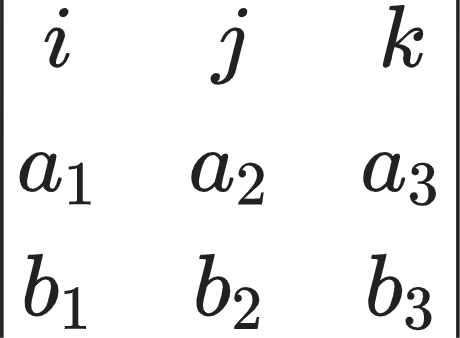
Izolujme sinθ, aby sme našli uhol medzi týmito vektormi

Nakoniec môžeme získať uhol ako:

Zamerajme sa na krížový produkt. Keďže budeme používať krížový súčin, musíme brať do úvahy aj tretí rozmer, pretože krížový súčin bude vektor kolmý na rovinu obsahujúcu a a b (takže nezostane v ich rovnakej rovine).

Všeobecne teda môžeme vziať ako príklad dva trojrozmerné vektory a a b: napr.

Krížový súčin možno vyjadriť ako determinant matice



kde je pozitívne orientovaná ortonormálna báza.

Výpočtom determinantu dostaneme

takže dostaneme nasledujúci vektor

Keďže v našom prípade uvažujeme o uhle medzi vektormi v rovine xy, môžeme zjednodušiť zápis vektorov **a** a **b tak,** že ich tretiu zložku nastavíme na 0, čím sa stanú dvojrozmernými vektormi. Nezabudnite, že v dôsledku krížových súčinov stále dostaneme kolmý vektor, ktorý bude kolmý na

rovina xy obsahujúca **a a b**.

Ak prepočítame predchádzajúce vzorce, pričom uvažujeme, že **a a b** patria do roviny xy (teda s ), dostaneme:

# Vyriešené problémy

## Príklad 1

*Zadanie:*

Nájdite uhol medzi vektormi **a** = <1, 2> a **b** = <-2, -1> pomocou **bodového súčinu**.

*Riešenie:*

Nech θ je uhol medzi vektormi a a b.

Nájdime uhol θ medzi vektormi pomocou bodového súčinu.

Použitie vzorca musíme vypočítať bodový súčin a veľkosti oboch vektorov.

Teraz môžeme vypočítať uhol ako:

**143.13°**

## Príklad 2

*Zadanie:*

Nájdite uhol medzi vektormi **a** = <1, 2> a **b** = <-2, -1> pomocou **krížového súčinu**.

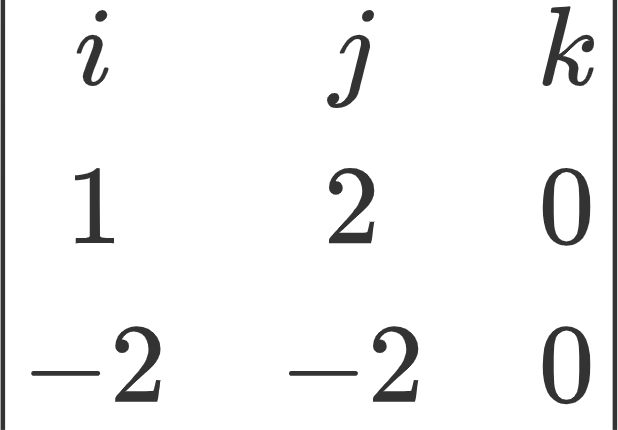
*Riešenie:*

Nech θ je uhol medzi a a b. Nájdime uhol θ medzi vektormi pomocou krížového súčinu.

Keďže budeme používať krížový súčin, musíme brať do úvahy tretí rozmer, takže musíme rozšíriť naše vektory na tretí rozmer.

Aktualizujte náš zápis a a b:

Vypočítajme krížový súčin **a a b**.



Teraz zistíme jeho veľkosť.

Teraz chceme použiť vzorec na získanie hodnoty uhla

Potom dostaneme

Dostávame θ ≈ **36,87 (alebo) 143,13°** (= 180 - 36,87) (keďže [sínus](https://www.cuemath.com/trigonometry/sine-function/) je kladný aj v druhom kvadrante).

## Príklad 3

*Zadanie:*

Nájdite uhol medzi vektormi **a** = <0, 5> a **b** = <2, 0> pomocou **bodového súčinu**.

*Riešenie:*

Nech θ je uhol medzi vektormi a a b.

Nájdime uhol θ medzi vektormi pomocou bodového súčinu.

Použitie vzorca musíme vypočítať bodový súčin a veľkosti oboch vektorov.

Teraz môžeme vypočítať uhol ako:

**90°**

*Poznámky*:

Na urýchlenie dosiahnutia tohto riešenia je možné vykonať niekoľko opatrení.  
 Predovšetkým výpočet a možno zjednodušiť, pretože sú to jednorozmerné vektory (jedna z ich zložiek je 0), takže ich modulo sa rovná ich nenulovej zložke.

Okrem toho výpočet a , aj keď je jednoduchý, nie je vôbec potrebný. Keďže sme zistili, že sa rovná 0 a to bude čitateľ argumentu arccos, je zbytočné vyhodnocovať aj menovateľa.

Ak však pôjdeme ďalej, toto cvičenie by sa dalo vyriešiť bez akýchkoľvek výpočtov, ale len pomocou geometrických úvah. Keďže **a** je vertikálny vektor (jeho zložka x je 0) a **b** je horizontálny vektor (jeho zložka y je 0), môžeme usúdiť, že sú to ortogonálne vektory, to znamená, že uhol medzi nimi je 90°.

# Národné hodnotiace cvičenie

(Skúška dospelosti - Taliansko:

https://drive.google.com/file/d/16bxAx7d0ts5zgr3P62qzGu0ZPoZ2aywl/view?usp=sharing)

PROBLÉM 1

Uvažujme trojuholníky, ktorých základňa je AB = 1 a ktorých vrchol C sa mení tak, že uhol C Aˆ B je

zachováva dvojnásobný uhol A Bˆ C .

1. Vztiahnite rovinu k vhodnému súradnicovému systému a určte rovnicu lokusu γ geometrického lokusu opísaného C.

2. Zobrazte γ, samozrejme, s prihliadnutím na predpísané geometrické podmienky.

3. Určte amplitúdu uhla A Bˆ C, ktorý tvorí súčet štvorcov výšok vzhľadom na strany AC a BC, a pomocou kalkulačky uveďte jeho približnú hodnotu v stupňoch a prvočíslach (sexagesimal).

4. Dokážte, že A Bˆ C = 36° potom AC=